Technische Universität Dresden
Fachrichtung Mathematik

Institut für Algebra

Gerüste formaler Kontexte

Diplomarbeit
zur Erlangung des ersten akademischen Grades

Diplommathematiker

vorgelegt von

Name:	Doerfel	Vorname:	Stephan
geboren am:	14.11.1982	in:	Forst (Lausitz)

Tag der Einreichung: 31.08.2009

Betreuer: Prof. Dr. rer. nat. Bernhard Ganter

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

In der Formalen Begriffsanalyse werden vollständige Verbände durch formale Kontexte beschrieben. Um mit solchen Kontexten arbeiten zu können, werden Konzepte wie Vollhomomorphismen, vollständige Kongruenzrelationen oder vollständige Unterverbände für Kontexte adaptiert. In dieser Arbeit wird das Gerüst eines Verbandes, das von R. Wille 1976 in dessen Arbeit *Subdirekte Produkte vollständiger Verbände* (s. [11]) vorgestellt wurde, begriffsanalytisch aufgearbeitet. Ausgehend von einem reduzierten Kontext $\mathbb{K}$ wird mit begriffsanalytischen Mitteln (Bindungen und Teilkontexten) eine Teilmenge des zugehörigen Begriffsverbandes ausgewählt. Diese bildet einen relativen sup-Unterhalbverband von $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ und wird das *Gerüst des Verbandes* genannt. Aus dieser Struktur kann der gesamte Begriffsverband konstruiert werden. Ähnlich wie mit Kontexten gewinnt man also eine Datenmenge, die (meist) kleiner ist als die Datenmenge der zum Verband gehörigen Ordnungsrelation, ohne Informationen über den Verband zu verlieren.
Zur Konstruktion des Gerüstes werden vollständig subdirekt irreduzible Faktoren eines Verbandes verwendet. Das Gerüst ist umso kleiner, je besser sich ein Verband zerlegen lässt. Auf der Ebene der Kontexte geht es um die Zerlegbarkeit in bestimmte Teilkontexte. Aus deren Begriffsverbänden wird das Gerüst gebildet. Für modulare Verbände ergibt sich ein besonderer Vorteil: Die Teilkontexte, die zur Konstruktion verwendet werden, sind disjunkt.
In Kap. 6 geht es um Verbände in der Varietät $\mathbf{M}_3$. Mit Hilfe von Bindungen können bestimmte Teilkontexte von Kontexten zu Verbänden in $\mathbf{M}_3$ beschrieben werden. Vorbild dafür ist die Arbeit *Finite sublattices of four-generated modular lattices* von B. Ganter, W. Poguntke und R. Wille (s. [4]). In dem Artikel wird das Konzept des Gerüstes zum Beweis einer Aussage über Verbände benutzt. Diese Möglichkeit motiviert die Untersuchung von Gerüsten auch in der Begriffsanalyse. Im zweiten Teil von Kap. 6 wird eine begriffsanalytisch formulierte Behauptung über die Varietät $\mathbf{M}_3$ mit Hilfe verbandstheoretischer Aussagen bewiesen. Die dort verwendeten Konzepte bieten Ansatzpunkte für weitere aussichtsreiche Übersetzungen.
Da in der Arbeit bekannte Resultate in die Sprache der Formalen Begriffsanalyse übersetzt werden, sind viele Sätze aus anderen Arbeiten zitiert. Im Folgenden wird kurz auf die zentralen Ergebnisse dieser Arbeit hingewiesen.
In Kap. 3 geht es um Projektivität und um die Pfeilrelationen in Kontexten modularer, doppelt fundierter vollständiger Verbände. Die Idee der Pfeilrelationen stammt ursprünglich aus der modularen Verbandstheorie. In Kap. 3 werden Zusammenhänge zwischen den Pfeilen und Projektivität rekonstruiert und einige (zu erwartende) Resultate gewonnen.
Für die Konstruktion des Gerüstes aus dem Kontext spielen Bindungen eine zentrale Rolle. In Kap. 4 wird deren Zusammenhang zu inf- und sup-Morphismen (vgl. [5]) beschrieben. Dies wird im zweiten Teil des Kapitels durch die Charakterisierung von surjektiven und injektiven Morphismen und von Vollisomorphismen ergänzt.
Das fünfte Kapitel beinhaltet die Übertragung des Gerüstkonzeptes auf Begriffsverbände bzw. deren Kontexte. In den Definitionen 62, 66 und 72 werden das Gerüst eines reduzierten Kontextes eines doppelt fundierten Begriffsverbandes, subirreduzible Elemente und die Komponenten des Gerüstes erklärt. Die zentralen Ergebnisse sind die Sätze 59, 64 und 68, in denen die

Konsistenz der Definitionen mit denen aus [11] bewiesen wird, Satz 71, der die Konstruktion des Gerüstes vereinfacht, sowie die Folgerungen in Abschn. 5.3. Die graphische Darstellung der Gerüste wird aus [11] übernommen und es wird eine Methode angegeben, wie die Diagramme aus dem Kontext heraus konstruiert werden können.
Die Hauptergebnisse in Kap. 6 sind eine Beschreibung bestimmter Teilkontexte in Kontexten doppelt fundierter vollständiger Verbände der Varietät $\mathbf{M}_3$ (Satz 83) und eine Charakterisierung aller bereinigten Kontexte solcher Verbände (Satz 94).

1.1 Bezeichnungen

In dieser Arbeit spielen sowohl vollständige als auch nicht vollständige Verbände eine Rolle. Um zwischen den verschiedenen Konzepten unterscheiden zu können, wird das Attribut vollständig nicht weggelassen. Es gibt also sowohl subdirekt irreduzible Verbände als auch *vollständig* subdirekt irreduzible *vollständige* Verbände. Um die Analogie zur Verbandstheorie zu verdeutlichen, erhalten die Konstruktionen zu vollständigen Verbänden den Index v. Es bezeichnet z. B. $\mathrm{Con}_\mathrm{v}\, V$ den Verband aller vollständigen Kongruenzrelationen eines vollständigen Verbandes V. An vielen Stellen in der Arbeit wird von Kontexten gesprochen. Dabei sind immer formale Kontexte im Sinne der Formalen Begriffsanalyse gemeint.
In der gesamten Arbeit steht $\mathbb{K}$ stets für einen Kontext (G, M, I), ohne dass dies explizit durch $\mathbb{K} := (G, M, I)$ angegeben wird. Ebenso bezeichnet $\mathbb{K}_x$ immer einen Kontext (G_x, M_x, I_x) für einen beliebigen Index x.
Die Funktionen $\gamma_x : G_x \to \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_x),\ g \mapsto (g^{I_x I_x}, g^{I_x})$ und $\mu_x : M_x \to \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_x),\ m \mapsto (m^{I_x}, m^{I_x I_x})$ zu jedem Kontext werden ohne Index geschrieben. Welche der Funktionen gebraucht wird, ergibt sich aus der Zugehörigkeit der Argumente zu den entsprechenden Gegenstands- bzw. Merkmalsmengen.
In einem Kontext $\mathbb{K}$ heißt ein Gegenstand g *reduzibel*, falls eine Menge $X \subseteq G$ existiert mit $X^I = g^I$ und $g \notin X$, also wenn der Gegenstandsbegriff γg sup-reduzibel ist. Analoges gilt für Merkmale. Ein Element von $\mathbb{K}$ heißt dementsprechend *irreduzibel*, wenn es weder ein reduzibler Gegenstand noch ein reduzibles Merkmal ist.
Um beim Rechnen mit Bindungen und verschiedenen Teilkontexten deutlich zu machen, mit welchem Operator (nach welcher Inzidenzrelation) man eine Menge ableitet, wird auf die Kurzform des Ableitungsoperators $'$ generell verzichtet. Stattdessen wird der Name der Inzidenzrelation benutzt. Z. B. wird statt (A'', A') bei Ableitung in einem Kontext (H, N, J) hier (A^{JJ}, A^J) geschrieben.
Die verwendete Komposition von Abbildungen $\alpha \circ \beta$ meint immer die Anwendung von α nach β, in Rechnungen wird statt $(\alpha \circ \beta)(x)$ vereinfachend $\alpha\beta x$ geschrieben.
Bei der Bezeichnung von Verbänden wird auf die besondere Unterscheidung von Grundmenge und Struktur verzichtet. Ist V ein vollständiger Verband, so bezeichnet V sowohl die Grundmenge als auch den Verband.
Die Bezeichnung des Gerüstes eines vollständigen Verbandes V wird in dieser Arbeit im Gegensatz zu [11] von $G(V)$ in $\mathfrak{S}(V)$ geändert, da G typischerweise die Gegenstandsmenge eines Kontextes bezeichnet. Da das Gerüst zu einem Kontext definiert wird, soll die Bezeichnung $G(G, M, I)$ vermieden werden. Das $\mathfrak{S}$ steht für *scaffolding,* das englische Wort für Gerüst, wie es auch in [4] genannt wird.
Wird der Operator Var auf eine einelementige Menge z. B. $\{V\}$ angewendet, so wird $\mathrm{Var}(V)$ statt $\mathrm{Var}(\{V\})$ geschrieben.

2 Grundlagen

In diesem Kapitel werden einige Konzepte der Formalen Begriffsanalyse und einige Eigenschaften (vollständiger) Verbände besprochen.

2.1 Doppelte Fundiertheit

In der Formalen Begriffsanalyse spielt die Eigenschaft der doppelten Fundiertheit eine wichtige Rolle. Der Versuch, bestimmte Eigenschaften und Ergebnisse aus der allgemeinen Verbandstheorie auf vollständige Verbände zu übertragen, gelingt nicht immer. Zum Beispiel ist der Kongruenzenverband $\operatorname{Con} V$ eines Verbandes V stets distributiv (vgl. [7], Kap. II.3, Theorem 11). Für den Verband aller vollständigen Kongruenzen $\operatorname{Con}_{\mathrm{v}} V$ eines vollständigen Verbandes V gilt dies i. Allg. nicht. Vielmehr gibt es sogar zu jedem vollständigen Verband A einen vollständigen Verband V, so dass $\operatorname{Con}_{\mathrm{v}} V$ isomorph zu A ist (vgl. [8], Theorem 1). Im Falle eines doppelt fundierten vollständigen Verbandes V ist jedoch - analog zur allgemeinen Verbandstheorie - die Distributivität von $\operatorname{Con}_{\mathrm{v}} V$ stets gegeben (vgl. [5], Satz 12). Da auch für diese Arbeit einige Resultate auf die Klasse der doppelt fundierten Begriffsverbände beschränkt sind, wird diese Eigenschaft im Folgenden kurz vorgestellt (vgl. [5], Definition 26).

Definition 1 Ein Kontext $\mathbb{K}$ heißt *doppelt fundiert*, wenn es für jeden Gegenstand $g \in G$ und jedes Merkmal $m \in M$ mit $g \not I m$ einen Gegenstand $h \in G$ und ein Merkmal $n \in M$ gibt mit

$$g \nearrow n \text{ und } m^I \subseteq n^I \quad \text{sowie} \quad h \swarrow m \text{ und } g^I \subseteq h^I.$$

Ein vollständiger Verband V heißt *doppelt fundiert*, wenn es zu je zwei Elementen $x, y \in V$ mit $x < y$ Elemente $s, t \in V$ gibt mit:

- s ist minimal bezüglich $s \leq y, s \not\leq x$ sowie
- t ist maximal bezüglich $t \geq x, t \not\geq y$. $\diamond$

Der nächste Satz zählt die Eigenschaften doppelt fundierter Verbände und Kontexte auf, die in dieser Arbeit benötigt werden. Die Resultate entstammen den Hilfssätzen 12, 14 und 15, den Sätzen 12 und 18 und Abb. 1.11 in [5].

Satz 2 *Eigenschaften doppelt fundierter Verbände und Kontexte:*

1. *Zu jedem Begriffsverband V eines doppelt fundierten Kontextes gibt es (bis auf Umbezeichnung von Gegenständen und Merkmalen) genau einen reduzierten Kontext $\mathbb{K}(V)$ mit $V \cong \mathfrak{B}(\mathbb{K}(V))$, nämlich*

$$\mathbb{K}(V) := (J(V), M(V), \leq).$$

   Dabei bezeichnet $J(V)$ die Menge aller sup*-irreduziblen und $M(V)$ die Menge aller* inf*-irreduziblen Elemente von V. Insbesondere ist in einem solchen Verband jeder Begriff Supremum von Gegenstandsbegriffen irreduzibler Gegenstände und Infimum von Merkmalsbegriffen irreduzibler Merkmale.*

2. *Jeder endliche Kontext ist doppelt fundiert.*

3. *Jeder längenendliche Verband ist doppelt fundiert.*

4. *Ist* $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ *doppelt fundiert, dann ist auch* $\mathbb{K}$ *doppelt fundiert. Ist ein vollständiger Verband* V *nicht doppelt fundiert, dann ist auch der Kontext* $(V, V, \leq)$ *nicht doppelt fundiert.*

5. *Ist* $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ *doppelt fundiert, so ist* $\mathrm{Con_v}(\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}))$ *vollständig distributiv.*

6. *Jeder doppelt fundierte vollständige Verband besitzt eine vollständig subdirekte Zerlegung in vollständig subdirekt irreduzible Faktoren.*

Der Kontext $\mathbb{K}(V)$ heißt *Standardkontext* von V. Aus Satz 2.1. folgt: Ein doppelt fundierter Begriffsverband $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ wird allein durch die irreduziblen Gegenstände und die irreduziblen Merkmale (und die entsprechend eingeschränkte Inzidenzrelation) eindeutig bestimmt. Die Menge der Gegenstandsbegriffe irreduzibler Gegenstände $J(\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}))$ ist supremum-dicht in $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ und die Menge der Merkmalsbegriffe irreduzibler Merkmale $M(\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}))$ ist infimum-dicht.
Zur Vererbung der Eigenschaft, doppelt fundiert zu sein, geben die beiden folgenden Hilfssätze Auskunft. Hilfssatz 4 entspricht dabei Hilfssatz 44 in [5].

Hilfssatz 3 *Jedes Produkt doppelt fundierter vollständiger Verbände ist ebenfalls doppelt fundiert.*

Beweis: Es seien V_i $(i \in I)$ doppelt fundierte vollständige Verbände und $V = \prod_{i \in I} V_i$. Weiter seien $x = (x_i \mid i \in I)$ und $y = (y_i \mid i \in I)$ Elemente von V mit $x < y$. Dann existiert ein $j \in R$ mit $x_j < y_j$ und es gibt ein minimales $\bar{s}_j \in V_j$ bezüglich der Eigenschaften $\bar{s}_j \leq y_j$ und $\bar{s}_j \nleq x_j$. Setze $s := (s_i \mid i \in I)$ mit $s_j = \bar{s}_j$ und $s_i = 0$ für $j \neq i$. Dann ist $s \leq y$ und $s \nleq x$, da $s_j \nleq x_j$. Ist $t = (t_i \mid i \in I) < s$, so gilt $t_j < \bar{s}_j$ und $t_i = 0$ für $j \neq i$. Dann ist aber $t \leq x$, da aus $t_j < \bar{s}_j$ sofort $t_j \leq x_j$ folgt. Somit erfüllt s das Minimalitätskriterium. Dual konstruiert man ein maximales Element $t \in V$ mit $t \geq x$ und $t \ngeq y$. ■

Hilfssatz 4 *Jeder Faktorverband eines doppelt fundierten vollständigen Verbandes ist doppelt fundiert.*

Ein ähnliches Ergebnis für vollständige Unterverbände gilt nicht (vgl. Kap. 7, Problem 3).

2.2 Teilkontexte und Teilrelationen

Für die Beschreibung von Faktor- und Unterverbänden benutzt man bestimmte Teilkontexte und Teilrelationen. In diesem Abschnitt werden kurz einige wichtige Resultate genannt.
Zunächst werden verträgliche und pfeilabgeschlossene Teilkontexte erklärt (vgl. [5], Definitionen 44, 45 und 46).

Definition 5 Ist $\mathbb{K}$ ein Kontext und sind $H \subseteq G$ und $N \subseteq M$, so wird $(H, N, I \cap (H \times N))$ ein Teilkontext von $\mathbb{K}$ genannt.
Ein Teilkontext $\mathbb{L} := (H, N, I \cap (H \times N))$ eines Kontextes $\mathbb{K}$ heißt *verträglich*, wenn für jeden Begriff $(A, B) \in \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ das Paar $(A \cap H, B \cap N)$ ein Begriff von $\mathbb{L}$ ist.
Ein Teilkontext $\mathbb{L} := (H, N, I \cap (H \times N))$ eines bereinigten Kontextes $\mathbb{K}$ ist *pfeilabgeschlossen*, falls gilt: aus $h \nearrow m$ und $h \in H$ folgt $m \in N$ und aus $g \swarrow n$ und $n \in N$ folgt $g \in H$. $\diamond$

Die Vereinigung und der Durchschnitt von pfeilabgeschlossenen Teilkontexten eines Kontextes $\mathbb{K}$ sind wieder pfeilabgeschlossen - dies folgt aus der Definition. Also gibt es einen kleinsten pfeilabgeschlossenen Teilkontext, der eine bestimmte vorgegebene Menge an Gegenständen und Merkmalen enthält. Dies rechtfertigt nachfolgende Definition (vgl. [5], S. 137):

Definition 6 Ein Teilkontext $\mathbb{L}$ eines reduzierten Kontextes $\mathbb{K}$ heißt 1-*erzeugt*, falls es einen Gegenstand g oder ein Merkmal m gibt, so dass $\mathbb{L}$ der kleinste pfeilabgeschlossene Kontext ist, der g bzw. m enthält, und man schreibt $\mathbb{L} := \langle g\rangle_{\mathbb{K}}$ bzw. $\mathbb{L} := \langle m\rangle_{\mathbb{K}}$. $\diamond$

Aus $g \swarrow\!\!\!\nearrow m$ folgt $\langle g\rangle_{\mathbb{K}} = \langle m\rangle_{\mathbb{K}}$. In einem reduzierten Kontext ist jeder Gegenstand durch einen Doppelpfeil mit einem Merkmal verbunden und umgekehrt (vgl. [5], Hilfssatz 13). Um alle 1-erzeugten Teilkontexte zu erhalten, kann man sich also auf Gegenstände oder auf Merkmale als Erzeuger beschränken.
Über die Bedeutung verträglicher Teilkontexte geben u. a. die drei folgenden Resultate (s. [5], Hilfssätze 34, 36 und 38) Auskunft.

Hilfssatz 7 *Ein Teilkontext $\mathbb{L} := (H, N, I \cap (H \times N))$ von $\mathbb{K}$ ist genau dann verträglich, wenn durch*

$$\Pi_{H,N}(A, B) := (A \cap H, B \cap N) \text{ für alle } (A, B) \in \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$$

ein surjektiver Vollhomomorphismus $\Pi_{H,N} : \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}) \to \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{L})$ definiert wird.

Hilfssatz 8 *Jeder verträgliche Teilkontext ist pfeilabgeschlossen. Bei einem doppelt fundierten Kontext ist auch jeder pfeilabgeschlossene Teilkontext verträglich.*

Hilfssatz 9 *Jeder verträgliche Teilkontext $\mathbb{L} := (H, N, I \cap (H \times N))$ eines bereinigten (bzw. reduzierten, bzw. doppelt fundierten) Kontextes $\mathbb{K}$ ist bereinigt (bzw. reduziert, bzw. doppelt fundiert). Die Pfeilrelationen vererben sich auf verträgliche Teilkontexte, d. h., es gilt $g \swarrow m$ in $\mathbb{L}$ genau dann, wenn $g \in H$, $m \in N$ und $g \swarrow m$ in $\mathbb{K}$ gilt, und entsprechend für $\nearrow$.*

Für vollständige Unterverbände hat man folgende Charakterisierung auf der Ebene der Kontexte (s. [5], Definition 50 und Satz 13).

Definition 10 Eine Relation $J \subseteq I$ heißt *abgeschlossene Relation* des Kontextes $\mathbb{K}$, wenn jeder Begriff von (G, M, J) auch ein Begriff von $\mathbb{K}$ ist. $\diamond$

Satz 11 *Ist J eine abgeschlossene Relation von $\mathbb{K}$, so ist $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, J)$ ein vollständiger Unterverband von $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$. Umgekehrt ist für jeden vollständigen Unterverband U von $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ die Relation*

$$J := \bigcup \{A \times B \mid (A, B) \in U\}$$

abgeschlossen und es ist $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, J) = U$.

Mehr zur Bedeutung von Teilkontexten (insbesondere ihr Zusammenhang zu vollständigen Kongruenzrelationen) und Teilrelationen kann in [5], Kap. 3.1 bis 3.3 nachgelesen werden.

2.3 Modulare Verbände

In der Verbandstheorie spielt das modulare Gesetz eine wichtige Rolle. Im Gegensatz z. B. zur Distributivität gibt es bisher keine Verallgemeinerung für vollständige Verbände. Wie man aus Kontexten doppelt fundierter vollständiger Verbände abliest, ob der zugehörige Begriffsverband modular ist, erklärt Satz 13 (vgl. [5], Satz 42 und Abb. 6.1). Weitere Charakterisierungen und Eigenschaften modularer Verbände können u. a. in [5], Kap. 6.2 nachgelesen werden.

Definition 12 Ein Verband V heißt *halbmodular*, wenn für beliebige $x, y \in V$ gilt:

$$x \wedge y \prec y \Longrightarrow x \prec x \vee y.$$

Ein Verband V heißt *modular*, wenn er dem Gesetz

$$\forall x, y, z \in V : x \geq z \Longrightarrow x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee z$$

genügt. Äquivalent dazu ist die Forderung, dass für alle $x, y, z \in V$ die folgende Gleichung gilt:

$$x \wedge (y \vee z) = x \wedge ((y \wedge (x \vee z)) \vee z). \diamond$$

Satz 13 *Für einen doppelt fundierten Begriffsverband $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

1. *$\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ ist modular.*
2. *$\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ ist halbmodular und dual halbmodular.*
3. *In $\mathbb{K}$ gelten die Austauschbedingungen:*

$$\{x \in G \mid \gamma x < \gamma g\} \subseteq A,\ h \in (A \cup \{g\})^{II} \text{ und } h \notin A^{II} \Longrightarrow g \in (A \cup \{h\})^{II},$$
$$\{y \in M \mid \mu y > \mu m\} \subseteq B,\ n \in (B \cup \{m\})^{II} \text{ und } n \notin B^{II} \Longrightarrow m \in (B \cup \{n\})^{II}.$$

4. *Aus $g \swarrow m$, $g \swarrow n$, hIm und $h \not{I} n$ folgt, dass ein Merkmal p existiert mit $h \not{I} p$, gIp und $m' \cap n' \subseteq p'$, und*

   aus $g \nearrow m$, $h \nearrow m$, gIn und $h \not{I} n$ folgt, dass ein Gegenstand q existiert mit $q \not{I} n$, pIm und $g' \cap h' \subseteq q'$.

Beweis: Nach [5], Abb. 6.1 sind die ersten beiden Bedingungen äquivalent. Nach [5], Satz 42 gilt 1. $\Longleftrightarrow$ 3. $\Longleftrightarrow$ 4. Die beiden Austauschbedingungen und die beiden Bedingungen in 4. sind jeweils zueinander dual. ∎

Eine wichtige Struktureigenschaft modularer Verbände zeigt der folgende Isomorphiesatz (vgl. [7], Kap. IV.1, Theorem 2).

Satz 14 ***(Isomorphiesatz)*** *Es sei V ein modularer Verband und $a, b \in V$. Die Abbildung*

$$\varphi_b : [a, a \vee b] \to [a \wedge b, b],\ x \mapsto x \wedge b$$

ist ein Isomorphismus zwischen den beiden Intervallen. Der dazu inverse Isomorphismus ist

$$\psi_a : [a \wedge b, b] \to [a, a \vee b],\ y \mapsto y \vee a.$$

Hilfssatz 16 gibt eine Eigenschaft der Pfeilrelationen in Kontexten modularer Verbände an: Jeder Pfeil ist ein Doppelpfeil (vgl. [5], S. 226). Dazu wird die Beschreibung der Pfeilrelationen mittels der Elemente des Begriffsverbandes (vgl. [5], S. 28) benötigt:

Hilfssatz 15 *Es gilt für jeden Gegenstand $g \in G$ und jedes Merkmal $m \in M$ in einem Kontext $\mathbb{K}$:*

$$g \swarrow m \iff \gamma g \wedge \mu m = (\gamma g)_* \neq \gamma g \text{ und}$$
$$g \nearrow m \iff \gamma g \vee \mu m = (\mu m)^* \neq \mu m.$$

Dabei ist

$$(\gamma g)_* := \sup\{\mathfrak{b} \in \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}) \mid \mathfrak{b} < \gamma g\} \quad \text{und} \quad (\mu m)^* := \inf\{\mathfrak{b} \in \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}) \mid \mathfrak{b} > \mu m\}.$$

Ein Gegenstand g ist genau dann irreduzibel, wenn $(\gamma g)_* \neq \gamma g$ ist. Ein Merkmal m ist genau dann irreduzibel, wenn $(\mu m)^* \neq \mu m$ gilt.

Hilfssatz 16 *Ist $\mathbb{K}$ ein reduzierter Kontext eines modularen Begriffsverbandes, so folgt aus $g \nearrow m$ oder $g \swarrow m$ stets $g \swarrow\!\!\!\nearrow m$ für beliebige $g \in G$ und $m \in M$.*

Beweis: Es sei $g \swarrow m$. Folglich gilt: $\gamma g \wedge \mu m = (\gamma g)_* \neq \gamma g$. Dem Isomorphiesatz zufolge sind die Intervalle $[\gamma g \wedge \mu m, \gamma g]$ und $[\mu m, \mu m \vee \gamma g]$ zueinander (Verbands-)isomorph. Die Nachbarschaftsrelation von $(\gamma g)_*$ und γg überträgt sich also auf μm und $\mu m \vee \gamma g$. Da der Kontext reduziert ist, ist μm inf-irreduzibel. Es gibt also genau einen oberen Nachbarn und man hat $\mu m \neq \mu m \vee \gamma g = (\mu m)^*$, also $g \nearrow m$. Dual folgert man die zweite Implikation. ■

Folgerung 17 *In einem reduzierten Kontext eines modularen Begriffsverbandes sind zwei verschiedene* 1*-erzeugte pfeilabgeschlossene Teilkontexte stets disjunkt.*

Beweis: Gibt es ein Element $k \in G \cup M$, das in beiden Teilkontexten enthalten ist, so gibt es im Kontext je eine Kette von Doppelpfeilen von k zu beiden Erzeugern der Teilkontexte. Damit existiert eine Doppelpfeilkette zwischen den Erzeugern. Die Teilkontexte sind folglich identisch. ■

3 Projektive Intervalle

In diesem Kapitel wird das aus der allgemeinen Verbandstheorie bekannte Konzept der Projektivität vorgestellt. Insbesondere zur Untersuchung modularer Verbände ist dies wichtig: Nach dem Isomorphiesatz sind zwei zueinander projektive Intervalle in einem modularen Verband (als Unterverbände) zueinander isomorph. Projektive Intervalle in modularen Verbänden sind auch der Ursprung der Pfeilrelationen in der Formalen Begriffsanalyse. Die hier vorgestellten Ergebnisse sind also eine Rekonstruktion des Ursprungs der Pfeilrelationen in Kontexten.

3.1 Projektive Intervalle in Begriffsverbänden

Definition 18 Es sei V ein Verband und es seien $[a,b]$ und $[c,d]$ Intervalle von V. Gilt

$$a \vee d = b \quad \text{und} \quad a \wedge d = c,$$

so heißt $[a,b]$ *abwärts perspektiv* zu $[c,d]$ und $[c,d]$ *aufwärts perspektiv* zu $[a,b]$. Man schreibt $[a,b] \searrow [c,d]$ bzw. $[c,d] \nearrow [a,b]$.
Die Intervalle $[a,b]$ und $[c,d]$ heißen *perspektiv* und man schreibt $[a,b] \sim [c,d]$, wenn $[a,b]$ aufwärts oder abwärts perspektiv zu $[c,d]$ ist.
$[a,b]$ und $[c,d]$ heißen *projektiv* und man schreibt $[a,b] \approx [c,d]$, wenn es eine natürliche Zahl n und Intervalle $[a_i,b_i]$, $i=1,\ldots,n$ gibt mit $a=a_1, b=b_1, c=a_n, d=b_n$ und $[a_i,b_i] \sim [a_{i+1},b_{i+1}]$ für $i=1,\ldots,n-1$.
Ein Intervall $[a,b]$ heißt *Primintervall*, falls a unterer Nachbar von b ist, also $[a,b]=\{a,b\}$ mit $a \neq b$ gilt. $\diamond$

Projektivität ist damit eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Intervalle eines Verbandes. Die zum Intervall $[a,b]$ gehörige Äquivalenzklasse wird mit $\big[[a,b]\big]_{\approx}$ bezeichnet. Das folgende Ergebnis ist eine Charakterisierung der Primintervalle in Begriffsverbänden.

Hilfssatz 19 *Ist $\mathbb{K}$ ein Kontext, g ein irreduzibler Gegenstand und m ein irreduzibles Merkmal, so gilt:*

$$g \swarrow\!\!\!\nearrow m \iff [(\gamma g)_*, \gamma g] \ \nearrow\ [\mu m, (\mu m)^*].$$

Beweis: Da g und m irreduzibel sind, hat man $\gamma g \neq (\gamma g)_*$ und $\mu m \neq (\mu m)^*$. Die Bedingungen für $g \swarrow\!\!\!\nearrow m$ (Hilfssatz 15) und die Bedingungen für Perspektivität aufwärts (Definition 18) sind damit identisch. $\blacksquare$

Hilfssatz 20 *Es sei $\mathbb{K}$ ein Kontext und $[(Q,Q^I),(P,P^I)]$ ein Intervall von $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ mit mindestens zwei Elementen. Genau dann ist $[(Q,Q^I),(P,P^I)]$ ein Primintervall, wenn gilt:*

$$\forall g \in P \setminus Q : (P,P^I) = (Q,Q^I) \vee \gamma g.$$

Äquivalent dazu ist die Bedingung:

$$\forall m \in Q^I \setminus P^I : (Q,Q^I) = (P,P^I) \wedge \mu m.$$

Beweis: Es sei zuerst $[(Q,Q^I),(P,P^I)]$ ein Primintervall und $g \in P\backslash Q$. Dann ist $\gamma g \leq (P,P^I)$, $\gamma g \not\leq (Q,Q^I)$ und damit
$$(Q,Q^I) < (Q,Q^I) \vee \gamma g \leq (P,P^I).$$
Da $[(Q,Q^I),(P,P^I)]$ Primintervall ist, folgt die behauptete Identität. Umgekehrt gelte nun obige Bedingung und es sei $(A,A^I) \in [(Q,Q^I),(P,P^I)]$ mit $A \supset Q$. Folglich existiert ein $g \in A \setminus Q \subseteq P \setminus Q$ und es ist
$$(A,A^I) \geq (Q,Q^I) \vee \gamma g = (P,P^I),$$
woraus sofort $(A,A^I) = (P,P^I)$ folgt. Die zweite Bedingung ergibt sich dual. ■

Sprechweise: Es sei $\mathbb{K}$ ein Kontext, $\mathbb{L} := (H,N,J)$ ein Teilkontext von $\mathbb{K}$ und $[(A,A^I),(B,B^I)]$ ein Intervall von $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ mit mindestens zwei Elementen. Das Intervall wird von $\mathbb{L}$ *aufgehoben*, falls $A \cap H = B \cap H$. Andernfalls wird das Intervall von $\mathbb{L}$ *getrennt*.

Bemerkung 21 Sind A und B Umfänge von $\mathbb{K}$ und ist $\mathbb{L}$ ein verträglicher Teilkontext von $\mathbb{K}$, so ist $A^I \cap N = B^I \cap N$ eine äquivalente Bedingung zu $A \cap H = B \cap H$.

Hilfssatz 22 *Es sei $\mathbb{K}$ ein Kontext, $\mathbb{L} := (H,N,J)$ ein Teilkontext von $\mathbb{K}$ und $g \in G$ irreduzibel. Das Primintervall $[(\gamma g)_*, \gamma g]$ wird genau dann von $\mathbb{L}$ getrennt, wenn $g \in H$ ist. Ein beliebiges, nichtleeres Intervall $[(A,A^I),(B,B^I)]$ von $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ wird von $\mathbb{L}$ genau dann getrennt, wenn $(B \setminus A) \cap H \neq \emptyset$ gilt.*

Beweis: Es sei $(\gamma g)_* = (C,D)$ und damit $g \notin C$. Ist $g \in H$, so wird $[(\gamma g)_*, \gamma g]$ von $\mathbb{L}$ getrennt, denn es ist $g \in g^{II} \cap H$ und $g \notin C \cap H$. Ist nun umgekehrt $C \cap H \subset g^{II} \cap H$, so existiert ein Gegenstand $h \in (g^{II} \cap H) \setminus C$. Nach Hilfssatz 20 gilt dann $\gamma g = (\gamma g)_* \vee \gamma h$. Da g aber irreduzibel ist, folgt $\gamma g = \gamma h$ und damit $g = h \in H$.
Die zweite Aussage ist trivial, da $A \cap H = B \cap H$ genau dann gilt, wenn $B \setminus A$ keine Elemente aus H enthält. ■

Bemerkung 23 Ist $\mathbb{L} := (H,N,J)$ ein verträglicher Teilkontext von $\mathbb{K}$, so wird das Intervall $[(A,A^I),(B,B^I)]$ genau dann von $\mathbb{L}$ getrennt, wenn $(A^I \setminus B^I) \cap N \neq \emptyset$ gilt. Dies folgt sofort aus Bemerkung 21.
Verträgliche Teilkontexte entsprechen zumindest bei reduzierten Kontexten doppelt fundierter vollständiger Verbände eineindeutig den vollständigen Kongruenzen. Eine Kongruenz Θ hebt in einem solchen Fall genau dann ein Intervall $[(A,A^I),(B,B^I)]$ auf (d. h. $(A,A^I)\Theta(B,B^I)$), wenn der zugehörige verträgliche Teilkontext es aufhebt. Zusammenhänge zwischen Kongruenzen und Projektivität findet man z. B. in [7], Kap. III.1.

Hilfssatz 24 *Es sei $\mathbb{K}$ ein Kontext und $\mathbb{L} := (H,N,J)$ ein verträglicher Teilkontext von $\mathbb{K}$. Ist $[(A,A^I),(B,B^I)]$ ein Intervall von $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$, so trennt $\mathbb{L}$ entweder alle oder keines der Intervalle in der Äquivalenzklasse $\big[[(A,A^I),(B,B^I)]\big]_{\approx}$.*

Beweis: Es genügt zu zeigen, dass für zwei perspektive Intervalle gilt, dass entweder keines oder beide getrennt werden. Da Projektivität den transitiven Abschluss von Perspektivität bildet, folgt daraus dann die Behauptung. Es werde $[(A,A^I),(B,B^I)]$ von $\mathbb{L}$ getrennt. Zuerst sei $[(A,A^I),(B,B^I)] \nearrow [(C,C^I),(D,D^I)]$. Nach Hilfssatz 22 gibt es einen Gegenstand $g \in (B \setminus A) \cap H$. Da nach Voraussetzung $(B,B^I) \wedge (C,C^I) = (A,A^I)$, also $B \cap C = A$ gilt, hat

man $g \notin C$. Andererseits ist aber $(D, D^I) = (B, B^I) \vee (C, C^I)$, also $D \supseteq B \cup C$ und damit $g \in D$. Wiederum nach Hilfssatz 22 trennt $\mathbb{L}$ nun auch $[(C, C^I), (D, D^I)]$.
Es sei nun $[(A, A^I), (B, B^I)] \searrow [(C, C^I), (D, D^I)]$. Nach Bemerkung 23 kann der Beweis mit Hilfe der Merkmale analog geführt werden. ■

3.2 Primintervalle modularer Begriffsverbände

Mit Hilfe der Bedingungen von Hilfssatz 20 kann im modularen Fall für jede Äquivalenzklasse projektiver Primintervalle aus dem reduzierten Kontext heraus ein Repräsentant angegeben werden.

Satz 25 *Es sei $\mathbb{K}$ ein Kontext eines modularen Begriffsverbandes und $[(Q, Q^I), (P, P^I)]$ ein Primintervall von $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$. Für jeden irreduziblen Gegenstand $g \in P \setminus Q$ bzw. jedes irreduzible Merkmal $m \in Q^I \setminus P^I$ gilt:*

$$[(Q, Q^I), (P, P^I)] \searrow [(\gamma g)_*, \gamma g] \quad \textit{bzw.} \quad [(Q, Q^I), (P, P^I)] \nearrow [\mu m, (\mu m)^*].$$

Beweis: Aus Hilfssatz 20 folgt unmittelbar

$$[(Q, Q^I), (P, P^I)] \searrow [(Q, Q^I) \wedge \gamma g, \gamma g].$$

Nach dem Isomorphiesatz ist $[(Q, Q^I) \wedge \gamma g, \gamma g]$ daher ebenfalls ein Primintervall. Da g irreduzibel ist, gibt es aber nur genau einen unteren Nachbarn von γg. Somit ist $(Q, Q^I) \wedge \gamma g = (\gamma g)_*$. Die Aussage über die Merkmale folgt dual. ■

In modularen Verbänden sind Primintervalle nur zu anderen Primintervallen projektiv (Isomorphiesatz). Folglich ist Projektivität auch eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Primintervalle. Da diese im Weiteren eine wesentliche Rolle spielen werden, wird folgende Bezeichnung eingeführt: $\mathrm{PI}(V)$ bezeichne die Menge aller Primintervalle eines modularen Verbandes V. Entsprechend bezeichne $\mathrm{PI}(V)/\approx$ die Menge aller Äquivalenzklassen projektiver Primintervalle.

Hilfssatz 26 *Es sei $\mathbb{K}$ ein reduzierter Kontext eines modularen Begriffsverbandes und es seien $g, h \in G$. Genau dann sind $[(\gamma g)_*, \gamma g]$ und $[(\gamma h)_*, \gamma h]$ zueinander projektiv, wenn g und h im Kontext durch eine endliche Folge von Doppelpfeilen verbunden sind. Entsprechendes gilt für Merkmale.*

Beweis: Vor dem eigentlichen Beweis werden zunächst einige Ketten perspektiver Intervalle betrachtet.
Beobachtung 1: Für drei beliebige Intervalle $[\mathfrak{a}_t, \mathfrak{b}_t]$, $t = 1, 2, 3$ von $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ gilt:

$$[\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1] \nearrow [\mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2] \text{ und } [\mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2] \nearrow [\mathfrak{a}_3, \mathfrak{b}_3] \implies [\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1] \nearrow [\mathfrak{a}_3, \mathfrak{b}_3].$$

Es ist nämlich $\mathfrak{b}_3 = \mathfrak{b}_2 \vee \mathfrak{a}_3 = (\mathfrak{b}_1 \vee \mathfrak{a}_2) \vee \mathfrak{a}_3 = \mathfrak{b}_1 \vee \mathfrak{a}_3$ und $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{b}_1 \wedge \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{b}_1 \wedge (\mathfrak{b}_2 \wedge \mathfrak{a}_3) = \mathfrak{b}_1 \wedge \mathfrak{a}_3$. Analog erhält man die entsprechende Implikation für abwärts perspektive Intervalle.
Beobachtung 2: Es sei in $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ die Situation

$$[\mathfrak{q}_1, \mathfrak{p}_1] \nearrow [\mathfrak{q}_2, \mathfrak{p}_2] \searrow [\mathfrak{q}_3, \mathfrak{p}_3]$$

gegeben und alle drei Intervalle seien Primintervalle. Da $\mathbb{K}$ reduziert ist, sind alle Gegenstände und Merkmale irreduzibel. Nach Satz 25 existiert ein Merkmal m mit $[\mathfrak{q}_2, \mathfrak{p}_2] \nearrow [\mu m, (\mu m)^*]$, was $[\mu m, (\mu m)^*] \searrow [\mathfrak{q}_2, \mathfrak{p}_2]$ entspricht. Mittels der ersten Beobachtung kann die gegebene Kette ersetzt werden durch

$$[\mathfrak{q}_1, \mathfrak{p}_1] \nearrow [\mu m, (\mu m)^*] \searrow [\mathfrak{q}_3, \mathfrak{p}_3].$$

Dual existiert ein Gegenstand $g \in G$, so dass die Kette

$$[\mathfrak{q}_1, \mathfrak{p}_1] \searrow [\mathfrak{q}_2, \mathfrak{p}_2] \nearrow [\mathfrak{q}_3, \mathfrak{p}_3] \quad \text{durch}$$

$$[\mathfrak{q}_1, \mathfrak{p}_1] \searrow [(\gamma g)_*, \gamma g] \nearrow [\mathfrak{q}_3, \mathfrak{p}_3]$$

ersetzt werden kann.
Zum Beweis des Hilfssatzes: Es sei zuerst $[(\gamma g)_*, \gamma g] \approx [(\gamma h)_*, \gamma h]$. Folglich existieren eine natürliche Zahl k und Primintervalle $[\mathfrak{q}_t, \mathfrak{p}_t]$, $t = 1, \ldots, k$, die eine Kette perspektiver Intervalle bilden:

$$[(\gamma g)_*, \gamma g] = [\mathfrak{q}_1, \mathfrak{p}_1] \sim [\mathfrak{q}_2, \mathfrak{p}_2] \sim \ldots \sim [\mathfrak{q}_k, \mathfrak{p}_k] = [(\gamma h)_*, \gamma h].$$

Nach Beobachtung 1 kann o.B.d.A. angenommen werden, dass die Perspektivitäten alternierend aufwärts und abwärts sind. Außerdem kann man annehmen, dass die erste Perspektivität aufwärts ist - gegebenenfalls fügt man $[(\gamma g)_*, \gamma g]$ vorn an der Kette an. Analog hat man Perspektivität abwärts am Ende der Kette und damit folgende Situation: Es gibt eine natürliche Zahl k und Primintervalle $[\mathfrak{q}_t, \mathfrak{p}_t]$, $t = 1, \ldots, k$, mit

$$[(\gamma g)_*, \gamma g] = [\mathfrak{q}_1, \mathfrak{p}_1] \nearrow [\mathfrak{q}_2, \mathfrak{p}_2] \searrow [\mathfrak{q}_3, \mathfrak{p}_3] \nearrow \ldots \searrow [\mathfrak{q}_k, \mathfrak{p}_k] = [(\gamma h)_*, \gamma h].$$

Der zweiten Beobachtung zufolge gibt es nun irreduzible Gegenstände g_t und Merkmale m_t (entsprechend den Intervallen $[\mathfrak{q}_t, \mathfrak{p}_t]$ indiziert), so dass folgende Kette entsteht:

$$[(\gamma g)_*, \gamma g] \nearrow [\mu m_2, (\mu m_2)^*] \searrow [(\gamma g_3)_*, \gamma g_3] \nearrow \ldots \nearrow [\mu m_{k-1}, (\mu m_{k-1})^*] \searrow [(\gamma h)_*, \gamma h].$$

Mit Hilfssatz 19 hat man im Kontext eine Kette von $k-1$ Doppelpfeilen zwischen g und h. Die Umkehrung folgt ebenfalls aus Hilfssatz 19: Da in einer Kette von Doppelpfeilen Gegenstände und Merkmale alternierend auftreten, erhält man eine endliche Kette perspektiver Intervalle. Die Aussagen für Merkmale folgen dual. ■

Satz 27 ist eine begriffsanalytische Entsprechung zu Theorem 8 aus [1], Abschn. X.4. Die Klasse der Verbände, auf die der Satz zutrifft, wird von der Klasse aller modularen Verbände endlicher Länge auf die aller modularen vollständigen Verbände, die einen doppelt fundierten Kontext haben, ausgeweitet. Insbesondere gilt der Satz also für alle modularen, doppelt fundierten vollständigen Verbände. Zudem verzichtet der Beweis auf die Theorie der *Bewertungen* (*valuations*) auf modularen Verbänden und stützt sich nur auf begriffsanalytische Argumente und den Isomorphiesatz.

Satz 27 *Es sei $\mathbb{K}$ ein doppelt fundierter, reduzierter Kontext eines modularen Begriffsverbandes. Die pfeilabgeschlossenen Teilkontexte von $\mathbb{K}$ entsprechen eineindeutig den Mengen von Äquivalenzklassen projektiver Primintervalle von $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$. Dabei werden jedem pfeilabgeschlossenen Teilkontext $\mathbb{L}$ genau die Äquivalenzklassen projektiver Primintervalle zugeordnet, deren Elemente von $\mathbb{L}$ getrennt werden. Die Zuordnungsabbildung ist ein Vollisomorphismus zwischen dem Verband der pfeilabgeschlossenen Teilkontexte und dem Potenzmengenverband von* $\mathrm{PI}(\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}))/\!\approx$.

Beweis: Nach Satz 25 hat jede Äquivalenzklasse projektiver Primintervalle einen Repräsentanten der Form $[(\gamma g)_*, \gamma g]$ mit $g \in G$. Eine Teilmenge $R \subseteq G$ heiße *projektiv abgeschlossen*, wenn aus $g \in R$ und $[(\gamma g)_*, \gamma g] \approx [(\gamma h)_*, \gamma h]$ auch $h \in R$ folgt. Damit entspricht jede Teilmenge von $\mathrm{PI}(\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}))/\approx$ eineindeutig einer projektiv abgeschlossenen Teilmenge von G. Für solche Teilmengen $R \subseteq G$ ist durch

$$\varphi R := (R, N_{\varphi R}, J_{\varphi R})$$

eine Abbildung erklärt, deren Bilder Teilkontexte von $\mathbb{K}$ sind. Dabei ist

$$N_{\varphi R} := \{n \in M \mid \exists r \in R : [(\gamma r)_*, \gamma r] \approx [\mu n, (\mu n)^*]\}$$

und $J_{\varphi R} := I \cap (R \times N_{\varphi R})$.

Behauptung: φR ist pfeilabgeschlossen.

Es sei $g \swarrow\!\!\!\nearrow m$. Nach Hilfssatz 19 ist $[(\gamma g)_*, \gamma g] \approx [\mu m, (\mu m)^*]$. Ist nun $g \in R$, so folgt nach Definition von $N_{\varphi R}$ sofort $m \in N_{\varphi R}$. Ist andererseits $m \in N_{\varphi R}$, so existiert ein $r \in R$, so dass $[(\gamma r)_*, \gamma r] \approx [\mu m, (\mu m)^*]$ gilt. Aus der Transitivität der Projektivität folgt $[(\gamma r)_*, \gamma r] \approx [(\gamma g)_*, \gamma g]$ und, da R projektiv abgeschlossen ist, folgt aus $r \in R$ sofort $g \in R$.
Umgekehrt kann nun jedem pfeilabgeschlossenen Teilkontext eine projektiv abgeschlossene Teilmenge von G durch $\psi(H, N, J) := H_\psi$ zugeordnet werden. Dabei sei

$$H_\psi := \{g \in G \mid \exists h \in H : [(\gamma h)_*, \gamma h] \approx [(\gamma g)_*, \gamma g]\}.$$

Behauptung: Ist $R \subseteq G$ projektiv abgeschlossen, so ist $\psi(\varphi R) = R$.

$$\psi(\varphi R) = \psi(R, N_{\varphi R}, J_{\varphi R}) = R_\psi = \{g \in G \mid \exists r \in R : [(\gamma r)_*, \gamma r] \approx [(\gamma g)_*, \gamma g]\} = R.$$

Die letzte Identität folgt dabei aus der projektiven Abgeschlossenheit von R.

Behauptung: Ist $\mathbb{L} := (H, N, J)$ ein pfeilabgeschlossener Teilkontext von $\mathbb{K}$, so ist $\varphi(\psi\mathbb{L}) = \mathbb{L}$.

Nach Hilfssatz 8 sind $\mathbb{L}$ und $\varphi(\psi\mathbb{L})$ verträglich und nach Hilfssatz 9 vererben sich die Reduziertheit und die Pfeilrelationen auf $\mathbb{L}$ und $\varphi(\psi\mathbb{L})$. Zuerst wird $H_\psi = H$ gezeigt. Da die Projektivität reflexiv ist, gilt $H_\psi \supseteq H$. Zum Beweis der umgekehrten Inklusion sei $g \in H_\psi$. Es gibt demnach einen Gegenstand $h \in H$, so dass $[(\gamma h)_*, \gamma h] \approx [(\gamma g)_*, \gamma g]$ gilt. Nach Hilfssatz 26 sind g und h durch eine Folge von Doppelpfeilen im Kontext miteinander verbunden. Aus der Pfeilabgeschlossenheit von $\mathbb{L}$ folgt $g \in H$; insgesamt also $H_\psi = H$.
Nun zu $N = N_{\varphi H_\psi}$: Es sei zuerst $n \in N$. Da n in $\mathbb{L}$ irreduzibel ist, existiert nach [5], Hilfssatz 13 ein Gegenstand $h \in H$ mit $h \nearrow n$, also $h \swarrow\!\!\!\nearrow n$. Nach Hilfssatz 19 gilt $[(\gamma h)_*, \gamma h] \approx [\mu n, (\mu n)^*]$ und wegen $H = H_\psi$ ist $h \in H_\psi$. Damit folgt $n \in N_{\varphi H_\psi}$, also $N \subseteq N_{\varphi H_\psi}$. Es sei nun umgekehrt $n \in N_{\varphi H_\psi}$. Per Definition existiert ein $r \in H_\psi$ mit $[(\gamma r)_*, \gamma r] \approx [\mu n, (\mu n)^*]$. Nach Satz 25 existiert ferner ein $g \in G$ mit $[\mu n, (\mu n)^*] \searrow [(\gamma g)_*, \gamma g]$. Aus Hilfssatz 19 folgt $g \swarrow\!\!\!\nearrow n$. Außerdem hat man $[(\gamma r)_*, \gamma r] \approx [(\gamma g)_*, \gamma g]$. Nach Hilfssatz 26 sind r und g durch eine Kette von Doppelpfeilen verbunden und damit auch r und n. Wegen $r \in H_\psi = H$ folgt aus der Pfeilabgeschlossenheit von $\mathbb{L}$ nun $n \in N$. Insgesamt ist damit $N = N_{\varphi H_\psi}$ gezeigt. Ohne Weiteres folgt auch $J = J_{\varphi H_\psi}$ und damit $\mathbb{L} = \varphi(\psi\mathbb{L})$.
Die Abbildungen φ und ψ sind also bijektiv und zueinander invers. Außerdem ist die Gegenstandsmenge eines pfeilabgeschlossenen Teilkontextes stets projektiv abgeschlossen (wegen $H_\psi = H$). $\mathbb{L} := (H, N, J)$ wird also von ψ die Menge H zugeordnet und damit die Menge aller Äquivalenzklassen von Primintervallen der Form $[(\gamma h)_*, \gamma h]$ mit $h \in H$. Nach Hilfssatz 22

sind das gerade die von $\mathbb{L}$ getrennten Primintervalle und nach Hilfssatz 24 trennt $\mathbb{L}$ alle Intervalle der zugehörigen Äquivalenzklassen. Da $\psi(H, N, J) = H$ gilt, bewahrt und reflektiert ψ beliebige Durchschnitte und Vereinigungen. Folglich sind ψ und φ Vollisomorphismen. ■

Folgerung 28 *Ist $\mathbb{K}$ ein reduzierter, doppelt fundierter Kontext eines modularen Begriffsverbandes, so trennt ein* 1*-erzeugter Teilkontext nur die Intervalle einer einzigen Klasse projektiver Primintervalle.*

Beweis: Nach Folgerung 17 sind die 1-erzeugten pfeilabgeschlossenen Teilkontexte disjunkt. Außerdem ist jeder pfeilabgeschlossene Teilkontext das Supremum aller 1-erzeugten Teilkontexte, die er enthält. Im Verband aller pfeilabgeschlossenen Teilkontexte sind die 1-erzeugten daher genau die sup-irreduziblen Elemente. Im Potenzmengenverband von $\mathrm{PI}(\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}))/\!\approx$ sind die sup-irreduziblen Elemente genau die einelementigen Teilmengen. Nach Satz 27 wird also jedem 1-erzeugten Teilkontext $\mathbb{L}$ nur genau eine Äquivalenzklasse projektiver Primintervalle zugeordnet und $\mathbb{L}$ trennt alle diese Intervalle und nur diese. ■

Folgerung 29 *In einem modularen Begriffsverband eines reduzierten, doppelt fundierten,* 1*-erzeugten Kontextes $\mathbb{K}$ sind alle Primintervalle zueinander projektiv.*

Beweis: Es gibt nur zwei pfeilabgeschlossene Teilkontexte von $\mathbb{K}$, nämlich den leeren Kontext und $\mathbb{K}$ selbst. Da die Zuordnungsabbildung aus Satz 27 surjektiv ist, gibt es auch nur zwei Elemente im Potenzmengenverband der Menge aller Äquivalenzklassen projektiver Intervalle. Folglich gibt es nur eine solche Klasse. ■

4 Bindungen und Morphismen

In diesem Kapitel werden Bindungen zwischen Kontexten eingeführt. Mit diesen werden Vollhomomorphismen und sup- und inf-Morphismen zwischen zwei vollständigen Verbänden beschrieben (vgl. [5], Kap. 7.2). Danach werden die Ordnung solcher Morphismen sowie die Eigenschaften Surjektivität und Injektivität mit Hilfe von Bindungen charakterisiert. Zwischen doppelt fundierten vollständigen Verbänden können damit auch Vollisomorphismen beschrieben werden.

4.1 Beschreibung von Morphismen mittels Bindungen

Definition 30 Es seien V, W vollständige Verbände. Eine Abbildung $\alpha : V \to W$ heißt sup-*Morphismus* bzw. inf-*Morphismus*, wenn für jede Teilmenge $A \subseteq V$ gilt:

$$\alpha \sup A = \sup \alpha[A] \quad \text{bzw.} \quad \alpha \inf A = \inf \alpha[A].$$

α ist *Vollhomomorphismus*, wenn α sowohl sup- als auch inf-Morphismus ist. $\diamond$

Definition 31 Es seien $\mathbb{K}_s$ und $\mathbb{K}_t$ Kontexte. Eine *Bindung* von $\mathbb{K}_s$ zu $\mathbb{K}_t$ ist eine Relation $R_{st} \subseteq G_s \times M_t$, für die gilt:

- für jeden Gegenstand $g \in G_s$ ist $g^{R_{st}}$ ein Begriffsinhalt von $\mathbb{K}_t$ und
- für jedes Merkmal $m \in M_t$ ist $m^{R_{st}}$ ein Begriffsumfang von $\mathbb{K}_s$. $\diamond$

Das Tripel (G_s, M_t, R_{st}) bildet selbst einen Kontext. In diesem Zusammenhang entspricht der Operator ${}^{R_{st}}$ dem üblichen Ableitungsoperator. Das Rechnen mit diesem Operator vereinfacht der folgende Hilfssatz.

Hilfssatz 32 *Ist R_{st} eine Bindung von $\mathbb{K}_s$ zu $\mathbb{K}_t$ und ist $A \subseteq G_s$ bzw. $B \subseteq M_t$, so gelten*

$$A^{I_s I_s R_{st}} = A^{R_{st}} \quad \textit{und} \quad B^{I_t I_t R_{st}} = B^{R_{st}}.$$

Beweis: Zunächst ist $A^{I_s I_s} \supseteq A$ und damit $A^{I_s I_s R_{st}} \subseteq A^{R_{st}}$. Zum Beweis der umgekehrten Inklusion sei $m \in A^{R_{st}}$ beliebig gewählt. Man hat dann $A \subseteq m^{R_{st}}$ und, da $m^{R_{st}}$ ein Umfang von $\mathbb{K}_s$ ist, folglich auch $A^{I_s I_s} \subseteq m^{R_{st}}$. Hieraus folgt nun $A^{I_s I_s R_{st}} \supseteq m^{R_{st} R_{st}} \supseteq \{m\}$ und man hat $A^{I_s I_s R_{st}} \supseteq A^{R_{st}}$. Die zweite Gleichung ergibt sich analog. ■

Der nächste Satz zeigt den Zusammenhang zwischen Bindungen und sup- bzw. inf-Morphismen (vgl. [5], Korollar 112 und Satz 53).

Satz 33 *Zu jeder Bindung $R \subseteq G_s \times M_t$ zwischen zwei Kontexten $\mathbb{K}_s$ und $\mathbb{K}_t$ wird durch*

$$\varphi_R(A, B) := (A^{R I_t}, A^R)$$

ein sup-*Morphismums* $\varphi_R : \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_s) \to \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_t)$ *definiert und durch*

$$\psi_R(A,B) := (B^R, B^{RI_s})$$

ein inf-*Morphismus* $\psi_R : \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_t) \to \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_s)$.
Umgekehrt entsteht aus jedem sup-*Morphismus* $\varphi : \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_s) \to \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_t)$ *eine Bindung* R_φ *vermöge*

$$R_\varphi := \{(g,m) \in G_s \times M_t \mid \varphi\gamma g \leq \mu m\}$$

und aus jedem inf-*Morphismus* $\psi : \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_t) \to \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_s)$ *eine Bindung*

$$R^\psi := \{(g,m) \in G_s \times M_t \mid \gamma g \leq \psi\mu m\}.$$

Für gegebene Kontexte $\mathbb{K}_s$ *und* $\mathbb{K}_t$ *hat man:* $\varphi_{R_\varphi} = \varphi$, $\psi_{R^\psi} = \psi$, $R_{\varphi_R} = R$ *und* $R^{\psi_R} = R$. *Außerdem gilt* $R_\varphi = R^\psi$ *genau dann, wenn* ψ *zu* φ *residual ist.*

Die sup-Morphismen von $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_s)$ nach $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_t)$ entsprechen also eineindeutig den Bindungen von $\mathbb{K}_s$ zu $\mathbb{K}_t$. Die inf-Morphismen von $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_s)$ nach $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_t)$ entsprechen eineindeutig den Bindungen von $\mathbb{K}_t$ zu $\mathbb{K}_s$.
Da Bindungen ebenso aus einer Relation zwischen Gegenständen und Merkmalen bestehen wie Kontexte, liegt es nahe, diese ebenfalls in einer Kreuztabelle zu veranschaulichen. In ein 2×2-Feld trägt man oben links $\mathbb{K}_s$ und unten rechts $\mathbb{K}_t$ ein. In das Feld oben rechts kann dann eine Bindung von $\mathbb{K}_s$ zu $\mathbb{K}_t$ eingetragen werden und in das vierte Feld eine Bindung von $\mathbb{K}_t$ zu $\mathbb{K}_s$.
Abb. 4.1 zeigt exemplarisch zwei Kontexte: $\mathbb{K}_s$ mit $G_s = \{1,2,3\}$ und $M_s = \{a,b,c\}$ und $\mathbb{K}_t$ mit $G_t = \{1',2',3'\}$ und $M_t = \{w,x,y,z\}$ sowie eine Bindung $R \subseteq G_s \times M_t$. Daneben sind die zugehörigen Verbände eingezeichnet. Durch Pfeile angegeben sind der von der Bindung R bestimmte sup-Morphismus $\varphi_R : \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_s) \to \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_t)$ und der ebenfalls von R bestimmte inf-Morphismus $\psi^R : \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_t) \to \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_s)$. Eingezeichnet sind dabei nur solche Pfeile, die bei einem minimalen Element einer Äquivalenzklasse des Kerns der entsprechenden Abbildung beginnen (für genauere Beschreibungen solcher Bilder s. Abschn. 5.6).

	a	b	c	w	x	y	z
1	×			×	×		
2		×				×	
3			×				
1′				×	×		
2′					×	×	
3′						×	×

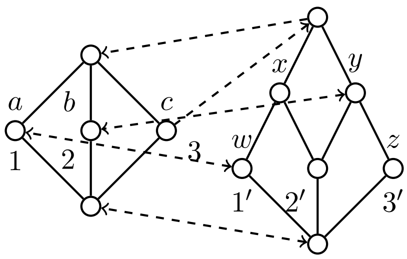


Abb. 4.1: Eine Bindung zwischen zwei Kontexten (s.o.)

Um auch die Komposition von Morphismen zu beschreiben, wird noch das Produkt von Bindungen benötigt.

Definition 34 Es seien $\mathbb{K}_r$, $\mathbb{K}_s$ und $\mathbb{K}_t$ Kontexte, J_{rs} eine Bindung von $\mathbb{K}_r$ zu $\mathbb{K}_s$ und J_{st} eine Bindung von $\mathbb{K}_s$ zu $\mathbb{K}_t$. Dann heißt

$$J_{rs} \circ J_{st} := \{(g,m) \in G_r \times M_t \mid g^{J_{rs}I_s} \subseteq m^{J_{st}}\}$$

das *Bindungsprodukt* von J_{rs} und J_{st}. $\diamond$

Hilfssatz 35 *Es seien $\mathbb{K}_r$, $\mathbb{K}_s$, $\mathbb{K}_t$, J_{rs} und J_{st} wie in Definition 34. Es gelten die folgenden Aussagen:*

1. *Für $g \in G_r$ und $m \in M_t$ ist*

$$m \in g^{J_{rs}I_sJ_{st}} \iff m^{J_{st}} \supseteq g^{J_{rs}I_s} \iff g^{J_{rs}} \supseteq m^{J_{st}I_s} \iff g \in m^{J_{st}I_sJ_{rs}}.$$

2. *Für $A \subseteq G_r$ gilt $A^{J_{rs}\circ J_{st}} = A^{J_{rs}I_sJ_{st}}$.*

3. *Für $B \subseteq M_t$ gilt $B^{J_{rs}\circ J_{st}} = B^{J_{st}I_sJ_{rs}}$.*

4. *$J_{rs} \circ J_{st}$ ist eine Bindung von $\mathbb{K}_r$ zu $\mathbb{K}_t$.*

5. *Für eine beliebige Bindung J_{rt} von $\mathbb{K}_r$ zu $\mathbb{K}_t$ gilt*

$$\begin{aligned} J_{rt} \subseteq J_{rs} \circ J_{st} &\iff \forall g \in G_r : g^{J_{rt}} \subseteq g^{J_{rs}I_sJ_{st}} \\ &\iff \forall m \in M_t : m^{J_{rt}} \subseteq m^{J_{st}I_sJ_{rs}}. \end{aligned}$$

Beweis: Zu 1.: Fasst man die Bindungen wie auf S. 18 beschrieben als Kontexte auf, so erhält man alle drei Äquivalenzen aus den Eigenschaften des Ableitungsoperators in Kontexten. Bei der mittleren Äquivalenz wird zusätzlich benutzt, dass $g^{J_{rs}}$ ein Inhalt von $\mathbb{K}_s$ ist und daher $g^{J_{rs}I_sI_s} = g^{J_{rs}}$ gilt. Ebenso ist $m^{J_{st}}$ ein Umfang von $\mathbb{K}_s$ und daher gilt $m^{J_{st}I_sI_s} = m^{J_{st}}$.
Zu 2.: Für $A \subseteq G_r$ hat man mit 1.:

$$\begin{aligned} A^{J_{rs}\circ J_{st}} &= \{m \in M_t \mid \forall g \in A : (g,m) \in J_{rs} \circ J_{st}\} \\ &= \{m \in M_t \mid \forall g \in A : g^{J_{rs}I_s} \subseteq m^{J_{st}}\} \\ &= \{m \in M_t \mid \forall g \in A : m \in g^{J_{rs}I_sJ_{st}}\} \\ &= A^{J_{rs}I_sJ_{st}}. \end{aligned}$$

Analog erhält man 3.
Zu 4.: Wegen 2. ist $g^{J_{rs}\circ J_{st}} = g^{J_{rs}I_sJ_{st}}$ ein Begriffsinhalt von $\mathbb{K}_t$ und wegen 3. ist $m^{J_{rs}\circ J_{st}} = m^{J_{st}I_sJ_{rs}}$ ein Begriffsumfang von $\mathbb{K}_r$.
5. folgt nun direkt aus 2. und 3.: $J_{rt} \subseteq J_{rs} \circ J_{st} \iff \forall g \in G_r : g^{J_{rt}} \subseteq g^{J_{rs}\circ J_{st}} = g^{J_{rs}I_sJ_{st}}$.
Analog zeigt man die Behauptung für Merkmale. ■

Die Übereinstimmung von Bindungsprodukt und Hintereinanderausführung von inf-Morphismen zeigt [5], Hilfssatz 113. Da bei der Gerüstkonstruktion in Kap. 5 sup-Morphismen verknüpft werden, wird hier in Satz 36 die entsprechende Version für sup-Morphismen bewiesen (dual zum Beweis in [5]).

Satz 36 *Es seien $\mathbb{K}_r$, $\mathbb{K}_s$, $\mathbb{K}_t$, J_{rs} und J_{st} wie in Definition 34. Für die zugehörigen* sup-*Morphismen gilt:*

$$\varphi_{J_{rs}\circ J_{st}} = \varphi_{J_{st}} \circ \varphi_{J_{rs}}.$$

Beweis: Es ist

$$R_{\varphi_{J_{st}}\circ\varphi_{J_{rs}}} = \{(g,m) \in G_r \times M_t \mid \varphi_{J_{st}}\varphi_{J_{rs}}\gamma g \leq \mu m\},$$

wobei wegen Hilfssatz 32

$$\varphi_{J_{rs}}\gamma g = \varphi_{J_{rs}}(g^{I_rI_r}, g^{I_r}) = (g^{I_rI_rJ_{rs}I_s}, g^{I_rI_rJ_{rs}}) = (g^{J_{rs}I_s}, g^{J_{rs}})$$

und

$$\varphi_{J_{st}}(g^{J_{rs}I_s}, g^{J_{rs}}) = (g^{J_{rs}I_sJ_{st}I_t}, g^{J_{rs}I_sJ_{st}})$$

ist. Folglich ist $(g,m) \in R_{\varphi_{J_{st}} \circ \varphi_{J_{rs}}} \iff m \in g^{J_{rs}I_sJ_{st}} \iff (g,m) \in J_{rs} \circ J_{st}$. ∎

Ein Vollhomomorphismus ist eine Abbildung zwischen Verbänden, die gleichzeitig sup- und inf-Morphismus ist. Nach Satz 33 entspricht einem Vollhomomorphismus daher ein Paar von Bindungen. Genauer beschreibt dies der nächste Satz (vgl. [5], Korollar 114).

Satz 37 *Es seien $\mathbb{K}_s$ und $\mathbb{K}_t$ Kontexte. Zu jedem Vollhomomorphismus $\varphi : \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_s) \to \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_t)$ wird durch*

$$R := R_\varphi = \{(g,m) \in G_s \times M_t \mid \varphi\gamma g \leq \mu m\}$$

eine Bindung von $\mathbb{K}_s$ zu $\mathbb{K}_t$ und durch

$$S := R^\varphi = \{(g,m) \in G_t \times M_s \mid \gamma g \leq \varphi\mu m\}$$

eine Bindung von $\mathbb{K}_t$ zu $\mathbb{K}_s$ erklärt und es gilt

$$A^{RI_t} = B^S \quad \text{und} \quad B^{SI_t} = A^R$$

für alle $(A,B) \in \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_s)$.
Sind umgekehrt $R \subseteq G_s \times M_t$ und $S \subseteq G_t \times M_s$ Bindungen, die diese Bedingungen erfüllen, dann ist durch $\varphi(A,B) := (B^S, A^R)$ ein Vollhomomorphismus von $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_s)$ nach $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_t)$ definiert.

Beweis: Aus Satz 33 kann man die Bindungen R und S, die zu φ gehören, direkt ablesen. Man erhält für $(A,B) \in \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$

$$(A^{RI_t}, A^R) = \varphi(A,B) = (B^S, B^{SI_t})$$

und damit direkt die beiden Gleichungen. Umgekehrt ist nach Satz 33 einerseits φ wegen $\varphi(A,B) := (B^S, A^R) = (A^{RI_t}, A^R)$ ein sup-Morphismus, andererseits wegen $\varphi(A,B) := (B^S, A^R) = (B^S, B^{SI_t})$ ein inf-Morphismus. ∎

Bemerkung 38 Die beiden Gleichungen $A^{RI_t} = B^S$ und $B^{SI_t} = A^R$ sind äquivalent. Es folgt nämlich aus $A^{RI_t} = B^S$ auch $A^{RI_tI_t} = B^{SI_t}$ und, da A^R ein Inhalt von $\mathbb{K}_t$ ist, folgt auch $A^R = A^{RI_tI_t} = B^{SI_t}$. Die umgekehrte Aussage folgt analog.

Beim Rechnen mit Produkten solcher Bindungspaare, die zu Vollhomomorphismen gehören, ist der nachstehende Hilfssatz nützlich.

Hilfssatz 39 *Es seien $\mathbb{K}_s$ und $\mathbb{K}_t$ Kontexte, R eine Bindung von $\mathbb{K}_s$ zu $\mathbb{K}_t$ und S eine Bindung von $\mathbb{K}_t$ zu $\mathbb{K}_s$, so dass für jeden Begriff $(A,B) \in \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_s)$ gilt: $A^{RI_t} = B^S$. Dann hat man für einen Umfang A von $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_s)$:*

$$A^{R\circ S} \supseteq A^{I_s} \quad \text{und} \quad A^{(R\circ S)I_sR} = A^R.$$

Beweis: Mit Hilfssatz 35.2. und der vorausgesetzten Identität erhält man

$$A^{R\circ S} = A^{RI_tS} = B^{SS} \supseteq B = A^{I_t} \text{ und}$$

$$A^{(R\circ S)I_sR} = (A^{RI_tS})^{I_sR} = (B^{SS})^{SI_t} = B^{SI_t} = A^{RI_tI_t} = A^R.$$

Für die zweite Identität in der zweiten Zeile benötigt man zusätzlich, dass $D^{I_sR} = D^{SI_t}$ für einen Inhalt D von $\mathbb{K}_s$ gilt. Dies folgt aus Bemerkung 38. ∎

4.2 Eigenschaften von Morphismen

Definition 40 Sind V, W zwei vollständige Verbände, so ist auf der Menge der Abbildungen von V nach W eine Ordnung definiert durch

$$\alpha_1 \leq \alpha_2 :\iff \forall v \in V : \alpha_1 v \leq \alpha_2 v$$

für Abbildungen $\alpha_1, \alpha_2 : V \to W$. $\diamond$

Auf der Menge der Bindungen zwischen zwei Kontexten $\mathbb{K}_s$ und $\mathbb{K}_t$ ist durch die Mengeninklusion auf natürliche Weise eine Ordnung gegeben. Diese entspricht der Ordnung der zugehörigen inf-Morphismen und ist dual zur Ordnung der zugehörigen sup-Morphismen.

Hilfssatz 41 *Sind $\mathbb{K}_s$ und $\mathbb{K}_t$ Kontexte, so gilt für Bindungen R, S von $\mathbb{K}_s$ zu $\mathbb{K}_t$:*

$$R \subseteq S \iff \varphi_R \geq \varphi_S \iff \psi_R \leq \psi_S.$$

Beweis: Es sei zunächst $R \subseteq S$ und $(A, B) \in \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$. Nach Voraussetzung ist $A^R \subseteq A^S$ und deshalb $\varphi_R(A, B) = (A^{RI_t}, A^R) \geq (A^{SI_t}, A^S) = \varphi_S(A, B)$. Ist umgekehrt $\varphi_R \geq \varphi_S$ und $(g, m) \in R$, so ist $\varphi_R \gamma g \leq \mu m$ wegen Satz 33. Nach Voraussetzung folgt $\varphi_S \gamma g \leq \varphi_R \gamma g \leq \mu m$. Wiederum wegen Satz 33 hat man $(g, m) \in S$ und damit insgesamt $R \subseteq S$. Die Äquivalenz zwischen den Bindungen und den inf-Morphismen erhält man analog. Die Ordnung kehrt sich hier nicht um, da die Bilder von ψ_R und ψ_S aus den Inhalten erzeugt werden statt aus den Umfängen. $\blacksquare$

Die Eigenschaften Surjektivität und Injektivität von Morphismen können auch mit Hilfe der zugehörigen Bindung beschrieben werden. Da die folgende Charakterisierung die irreduziblen Gegenstände bzw. Merkmale eines Kontextes benutzt, werden die betreffenden Verbände als doppelt fundiert vorausgesetzt.

Satz 42 *Es seien $\mathbb{K}_s$ und $\mathbb{K}_t$ Kontexte und $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_t)$ sei doppelt fundiert. Für einen* sup*-Morphismus $\alpha : \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_s) \to \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_t)$, gegeben durch die Bindung $R_\alpha \subseteq G_s \times M_t$, sind folgende Aussagen äquivalent:*

- *α ist surjektiv.*
- ($\mathbf{Sur}_{\text{sup}}$) *Ist $g \in G_t$ irreduzibel, so existiert ein $h \in G_s$ mit $h^{R_\alpha} = g^{I_t}$.*

Für einen inf*-Morphismus $\alpha : \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_s) \to \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_t)$, gegeben durch die Bindung $S^\alpha \subseteq G_t \times M_s$, sind äquivalent:*

- *α ist surjektiv.*
- ($\mathbf{Sur}_{\text{inf}}$) *Ist $m \in M_t$ irreduzibel, so existiert ein $n \in M_s$ mit $n^{S^\alpha} = m^{I_t}$.*

Ist $\alpha : \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_s) \to \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_t)$ Vollhomomorphismus, gegeben durch das Bindungspaar (R_α, S^α), dann ist jede der Bedingungen ($\mathbf{Sur}_{\text{sup}}$) *und* ($\mathbf{Sur}_{\text{inf}}$) *äquivalent zur Surjektivität von α.*

Beweis: Es sei $\alpha : \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_s) \to \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_t)$ ein surjektiver sup-Morphismus und $g \in G_t$ irreduzibel. Folglich existiert ein Begriff $(A, B) \in \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_s)$ mit

$$\gamma g = \alpha(A, B) = (A^{R_\alpha I_t}, A^{R_\alpha}) = \sup\{(h^{R_\alpha I_t}, h^{R_\alpha}) \mid h \in A\}.$$

Da g irreduzibel ist, muss γg einem der Begriffe $(h^{R_\alpha I_t}, h^{R_\alpha})$ entsprechen, d. h., es gibt ein $h \in A \subseteq G_s$ mit $h^{R_\alpha} = g^{I_t}$. Ist umgekehrt $(\mathbf{Sur}_{\text{sup}})$ erfüllt, so gehören die Gegenstandsbegriffe aller irreduziblen Gegenstände von $\mathbb{K}_t$ zu $\alpha[\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_s)]$. Deren Suprema bilden gerade $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_t)$ und folglich ist α surjektiv. Dual folgert man die zweite Äquivalenz. Die Aussage über Vollhomomorphismen ergibt sich nun sofort aus Satz 37. ∎

Satz 43 *Es seien $\mathbb{K}_s$ und $\mathbb{K}_t$ Kontexte und $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_s)$ sei doppelt fundiert. Für einen* sup*-Morphismus $\alpha : \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_s) \to \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_t)$, gegeben durch die Bindung $R_\alpha \subseteq G_s \times M_t$, sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- *α ist injektiv.*
- $(\mathbf{Inj}_{\text{sup}})$ *Ist $m \in M_s$ irreduzibel, so existiert ein $n \in M_t$ mit $n^{R_\alpha} = m^{I_s}$.*

Für einen inf*-Morphismus $\alpha : \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_s) \to \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_t)$, gegeben durch die Bindung $S^\alpha \subseteq G_t \times M_s$, sind äquivalent:*

- *α ist injektiv.*
- $(\mathbf{Inj}_{\text{inf}})$ *Ist $g \in G_s$ irreduzibel, so existiert ein $h \in G_t$ mit $h^{S^\alpha} = g^{I_s}$.*

Ist $\alpha : \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_s) \to \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_t)$ Vollhomomorphismus, gegeben durch das Bindungspaar (R_α, S^α), dann ist jede der Bedingungen $(\mathbf{Inj}_{\text{sup}})$ *und* $(\mathbf{Inj}_{\text{inf}})$ *äquivalent zur Injektivität von α.*

Beweis: Es sei α ein sup-Morphismus. Nach Satz 33 entspricht die zu α gehörige Bindung R_α gleichzeitig einem inf-Morphismus $\beta : \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_t) \to \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_s)$, wobei β residual zu α ist. Laut [5], Hilfssatz 9 ist α genau dann injektiv, wenn β surjektiv ist. Die zur Surjektivität von β äquivalente Bedingung $(\mathbf{Sur}_{\text{inf}})$ aus Satz 42 entspricht Bedingung $(\mathbf{Inj}_{\text{sup}})$. Dual erhält man die zweite Äquivalenz und zusammen mit Satz 37 ergibt sich die Aussage über Vollhomomorphismen. ∎

Folgerung 44 *Es seien $\mathbb{K}_s$ und $\mathbb{K}_t$ Kontexte doppelt fundierter vollständiger Verbände. Für einen Vollhomomorphismus $\alpha : \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_s) \to \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_t)$, gegeben durch das Bindungspaar (R_α, S^α), sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *α ist Vollisomorphismus zwischen $\mathbb{K}_s$ und $\mathbb{K}_t$.*
2. *R_α erfüllt die Bedingungen* $(\mathbf{Sur}_{\text{sup}})$ *und* $(\mathbf{Inj}_{\text{sup}})$.
3. *S^α erfüllt die Bedingungen* $(\mathbf{Sur}_{\text{inf}})$ *und* $(\mathbf{Inj}_{\text{inf}})$.

Beweis: Die Behauptung folgt sofort aus den Sätzen 42 und 43, da Vollisomorphismen gerade bijektive Vollhomomorphismen sind. ∎

5 Das Gerüst eines formalen Kontextes

In der Arbeit *Subdirekte Produkte vollständiger Verbände* von Rudolf Wille [11] werden in vollständigen Verbänden mit Hilfe von trennenden Vollhomomorphismen supremum-dichte Teilmengen konstruiert. In Verbänden endlicher Länge wird die Wahl dieser Vollhomomorphismen standardisiert, so dass jedem solchen Verband eindeutig eine supremum-dichte Teilmenge zugeordnet werden kann: das Gerüst des Verbandes. Aus der Struktur des Gerüstes (als relativer $\sup -$Unterhalbverband) kann der gesamte Verband rekonstruiert werden. Die Grundmenge des Gerüstes ist aber nur eine Teilmenge der Grundmenge des Verbandes und oft deutlich kleiner als diese. Bevor das Konzept für Kontexte adaptiert wird, werden einige Definitionen und Ergebnisse aus [11] zitiert und zusammengefasst.

5.1 Supremum-dichte Teilmengen und das Gerüst eines vollständigen Verbandes

Definition 45 Es seien V und V_t $(t \in T)$ vollständige Verbände. Eine Menge von Vollhomomorphismen $\alpha_t : V \to V_t$ $(t \in T)$ heißt *trennend*, wenn für alle $a \neq b \in V$ ein $t \in T$ existiert, so dass $\alpha_t(a) \neq \alpha_t(b)$ gilt. $\diamond$

Zu einem inf-Morphismus $\alpha : V \to W$ (V und W seien vollständige Verbände) bezeichne $\underline{\alpha} : W \to V$ die Abbildung

$$w \mapsto \inf \alpha^{-1} w.$$

Es gilt dann

- für alle $v \in V : \underline{\alpha}\alpha v \leq v$ und
- für alle $w \in \alpha[V] : \alpha\underline{\alpha} w = w$.

Mit dieser Definition wird in [11] der Hilfssatz 1.1 formuliert, der nachfolgend zitiert wird. Da für einen surjektiven inf-Morphismus α die Abbildungen α und $\underline{\alpha}$ zueinander adjungiert sind, ergibt sich das gleiche Resultat als eine Folgerung von [5], Hilfssatz 9.

Hilfssatz 46 *Sind V und W vollständige Verbände und ist $\alpha : V \to W$ ein surjektiver* inf*-Morphismus, dann ist $\underline{\alpha}$ ein injektiver* sup*-Morphismus.*

Auf Teilmengen von vollständigen Verbänden lässt sich eine partielle Supremum-Operation erklären. Damit bleibt bei Teilmengenbildung die Ordnungsstruktur des Verbandes erkennbar.

Definition 47 Ein *relativer* sup-*Unterhalbverband* eines vollständigen Verbandes V ist eine Teilmenge $U \subseteq V$ zusammen mit der partiellen Operation $\sup_U$, so dass für $A \subseteq U$ und $u \in U$ gilt: $\sup_U A = u \iff \sup A = u$.
Ein *partieller* sup-*Halbverband* ist ein Paar $(H, \sup_H)$. Dabei ist H eine Menge und durch $\sup_H : \mathfrak{P}(H) \to H$ ist eine partielle Operation gegeben, so dass $(H, \sup_H)$ isomorph zu einem

relativen sup-Unterhalbverband eines vollständigen Verbandes ist. Auf H ist die Ordnung $\leq_H$ erklärt durch $a \leq_H b :\Longleftrightarrow \sup_H\{a, b\} = b$.
Eine Teilmenge $A \subseteq H$ heißt *Vollideal*, falls A nach unten abgeschlossen (d. h., $a \leq_H b$ und $b \in A$ impliziert $a \in A$) und gegen die Operation $\sup_H$ abgeschlossen ist. Letzteres bedeutet: Ist $B \subseteq A$ und ist $\sup_H B$ erklärt, so ist $\sup_H B \in A$. $\diamond$

Da in einem relativen sup-Unterhalbverband U von V die partielle Operation $\sup_U$ mit der Supremum-Operation sup in V übereinstimmt, wird statt $\sup_U$ auch einfach sup geschrieben. Die durch V auf U induzierte Ordnung wird mit $\leq_U$ oder einfach $\leq$ bezeichnet.
Mit Hilfe von vollständigen Verbänden V_t $(t \in T)$ und trennenden Vollhomomorphismen $\alpha_t : V \to V_t$ $(t \in T)$ konstruiert man in einem vollständigen Verband V den relativen sup-Unterhalbverband

$$\mathfrak{S}(\alpha_t \mid t \in T) := \{\underline{\alpha}_t \alpha_t v \mid v \in V \text{ und } t \in T\} \setminus \{0\}.$$

Die wichtigsten Ergebnisse aus [11] – die Sätze 1.2, 1.4 und 3.2 – werden im Folgenden als Sätze 48, 49 und 50 zitiert:

Satz 48 *Sind V und V_t $(t \in T)$ vollständige Verbände und $\alpha_t : V \to V_t$ trennende Vollhomomorphismen, dann ist die Menge $\mathfrak{S}(\alpha_t \mid t \in T)$ supremum-dicht in V.*

Satz 49 *Sind V und V_t $(t \in T)$ vollständige Verbände und $\alpha_t : V \to V_t$ trennende Vollhomomorphismen, dann ist V isomorph zum Verband aller Vollideale von $\mathfrak{S}(\alpha_t \mid t \in T)$.*

Mit Satz 49 wird die Methode zur Konstruktion des Verbandes aus dem Gerüst heraus deutlich. In eine ähnliche Richtung geht das Konzept des *Kerns* eines endlichen Verbandes (vgl. [3]). Dort wird eine minimale Teilmenge von Elementen angegeben, deren Filterverband isomorph zum Ausgangsverband ist.
Der nächste Satz erlaubt die Konstruktion eines vollständigen Verbandes V als vollständig subdirektes Produkt von gegebenen Verbänden V_t $(t \in T)$. Durch die Kenntnis bestimmter sup-Morphismen zwischen diesen Verbänden ist das subdirekte Produkt sogar eindeutig bestimmt.

Satz 50 *Sind V_t $(t \in T)$ vollständige Verbände und $\alpha_{st} : V_t \to V_s$ $(s, t \in T)$* sup-*Morphismen, die den Bedingungen*

1. *α_{tt} ist die Identität für alle $t \in T$ und*

2. *$\alpha_{rt} \geq \alpha_{rs} \circ \alpha_{st}$ für $r, s, t \in T$*

genügen, dann ist

$$\mathfrak{S}(\alpha_{st} \mid s, t \in T) := \{(\alpha_{st} a \mid s \in T) \mid a \in V_t, t \in T\} \setminus \{(0)_{s \in T}\}$$

eine supremum-dichte Teilmenge eines vollständigen Unterverbandes V von $\prod_{s \in T} V_s$ und die Einschränkungen α_t der kanonischen Projektionen $\pi_t : \prod_{s \in T} V_s \to V_t$ $(t \in T)$ auf V sind surjektive trennende Vollhomomorphismen, für die gilt:

$$\alpha_{st} = \alpha_s \circ \underline{\alpha}_t \ (s, t \in T) \quad \textit{und} \quad \mathfrak{S}(\alpha_{st} \mid s, t \in T) = \mathfrak{S}(\alpha_t \mid t \in T).$$

In [11] wird im zweiten Abschnitt für vollständige Verbände V endlicher Länge das Gerüst $\mathfrak{S}(V)$ definiert.

Definition 51 Es sei V ein vollständiger Verband endlicher Länge. Ein Element $a \neq 0$ von V heißt *subirreduzibel*, falls es einen subdirekt irreduziblen vollständigen Verband $\bar{V}$ und einen surjektiven Vollhomomorphismus $\alpha : V \to \bar{V}$ mit $a = \underline{\alpha}\alpha a$ gibt.
Die Menge aller subirreduziblen Elemente von V heißt das *Gerüst* von V und wird mit $\mathfrak{S}(V)$ bezeichnet. $\diamond$

Bemerkung 52 Sind α_t $(t \in T)$ gerade die in Definition 51 beschriebenen Vollhomomorphismen, so hat man

$$\mathfrak{S}(V) = \mathfrak{S}(\alpha_t \mid t \in T).$$

Somit gelten insbesondere die Sätze 48 und 49 für das Gerüst.

Schließlich gibt es in [11], Abschn. 6 noch eine Bemerkung zu modularen Verbänden.

Bemerkung 53 Sind V und V_t $(t \in T)$ modulare Verbände endlicher Länge und gibt es zu jedem $t \in T$ Elemente $a_t, b_t \in V$ mit $\alpha_t a_t \neq \alpha_t b_t$ und $\alpha_s a_t = \alpha_s b_t$ für alle $s \in T \setminus \{t\}$, so gilt $\underline{\alpha}_r V_r \cap \underline{\alpha}_s V_s = \{0\}$ für $r \neq s$.

5.2 Supremum-dichte Teilmengen eines Begriffsverbandes

In diesem Abschnitt werden Ergebnisse aus [11] mit den Methoden der Formalen Begriffsanalyse neu formuliert und bewiesen. Die Klasse der Verbände, von denen das Gerüst bestimmt werden kann, wird dabei auf die Klasse aller doppelt fundierten vollständigen Verbände erweitert. Zu jeder Definition wird außerdem die Konsistenz mit der verbandstheoretischen Definition in [11] gezeigt.

Definition 54 Eine Menge von Bindungpaaren (R_t, S_t) nennt man *trennende Bindungen zwischen den Kontexten* $\mathbb{K}$ *und* $\mathbb{K}_t$ $(t \in T)$, falls

- R_t Bindung von $\mathbb{K}$ zu $\mathbb{K}_t$ und S_t Bindung von $\mathbb{K}_t$ zu $\mathbb{K}$ $(t \in T)$ ist,
- $A^{R_t I_t} = B^{S_t}$ für $(A, B) \in \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ gilt und
- es für je zwei Umfänge $A \neq C$ von $\mathbb{K}$ ein $t \in T$ gibt, so dass $A^{R_t} \neq C^{R_t}$ gilt. $\diamond$

Bemerkung 55 Die letzte Bedingung heißt *Trennungseigenschaft* und kann ersetzt werden durch: Für je zwei Inhalte $B \neq D$ von $\mathbb{K}$ gibt es ein $t \in T$, so dass $B^{S_t} \neq D^{S_t}$ gilt.

Satz 56 *Für trennende Bindungen* (R_t, S_t) $(t \in T)$ *zwischen Kontexten* $\mathbb{K}$ *und* $\mathbb{K}_t$ *ist*

$$\mathfrak{S}(R_t, S_t)_{t \in T} := \{(A^{R_t \circ S_t I}, A^{R_t \circ S_t}) \mid (A, B) \in \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}), t \in T\} \setminus \{(M^I, M)\}$$

eine supremum-dichte Teilmenge von $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$.

Beweis: Für $(A, B) \in \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ wird gezeigt: $(A, B) = \sup\{(A^{R_t \circ S_t I}, A^{R_t \circ S_t}) \mid t \in T\}$.
Man hat zunächst nach dem Hauptsatz der Begriffsanalyse

$$\sup\{(A^{R_t \circ S_t I}, A^{R_t \circ S_t}) \mid t \in T\} = ((\bigcap_{t \in T} A^{R_t \circ S_t})^I, \bigcap_{t \in T} A^{R_t \circ S_t}).$$

Folglich genügt es, $A = (\bigcap_{t\in T} A^{R_t\circ S_t})^I$ zu zeigen. Dies soll mit der Trennungseigenschaft erreicht werden. Es sei dafür $u \in T$ beliebig. Mittels Hilfssatz 32 erhält man:

$$(\bigcap_{t\in T} A^{R_t\circ S_t})^{IR_u} = (\bigcap_{t\in T} A^{R_t\circ S_t II})^{IR_u} = (\bigcup_{t\in T} A^{R_t\circ S_t I})^{IIR_u} = (\bigcup_{t\in T} A^{R_t\circ S_t I})^{R_u}.$$

Weiter folgert man mit Hilfssatz 39:

$$A^{R_t\circ S_t} \supseteq A^I \Longrightarrow A^{R_t\circ S_t I} \subseteq A^{II} = A \Longrightarrow \bigcup_{t\in T} A^{R_t\circ S_t I} \subseteq A \Longrightarrow (\bigcup_{t\in T} A^{R_t\circ S_t I})^{R_u} \supseteq A^{R_u}.$$

Ebenfalls aus Hilfssatz 39 folgt:

$$\begin{aligned}\bigcap_{t\in T} A^{R_t\circ S_t} \subseteq A^{R_u\circ S_u} &\Rightarrow (\bigcap_{t\in T} A^{R_t\circ S_t})^I \supseteq A^{R_u\circ S_u I}\\ &\Rightarrow (\bigcap_{t\in T} A^{R_t\circ S_t})^{IR_u} \subseteq A^{R_u\circ S_u IR_u} = A^{R_u}.\end{aligned}$$

Es ist also $(\bigcap_{t\in T} A^{R_t\circ S_t})^{IR_u} = (\bigcup_{t\in T} A^{R_t\circ S_t I})^{R_u} = A^{R_u}$ für alle $u \in T$. Aus der Kontraposition der Trennungseigenschaft folgt die behauptete Identität. Der Begriff (M^I, M) trägt zur Supremum-Bildung nicht bei, da $(M^I, M) = \sup\emptyset$ gilt. ∎

Behauptung: Trennende Bindungen entsprechen trennenden Vollhomomorphismen.
Es seien $V := \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ und $V_t := \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_t)$ $(t \in T)$. Nach Satz 37 entsprechen Vollhomomorphismen $\alpha_t : V \to V_t$ eineindeutig Paaren von Bindungen (R_t, S_t) mit $\alpha_t(A,B) = (B^{S_t}, A^{R_t})$ $(t \in T)$. Die Trennungseigenschaft überträgt sich direkt von den Bindungspaaren auf die Vollhomomorphismen und umgekehrt, da verschiedene Begriffe verschiedene Umfänge haben.

Satz 57 *Sind $\mathbb{K}$ und $\mathbb{K}_t$ Kontexte, (R_t, S_t) trennende Bindungen zwischen Kontexten $\mathbb{K}$ und $\mathbb{K}_t$ und $\alpha_t : \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}) \to \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_t)$ die zugehörigen Vollhomomorphismen $(A,B) \mapsto (B^{S_t}, A^{R_t})$ $(t \in T)$, so gilt*

$$\mathfrak{S}(\alpha_t \mid t \in T) = \mathfrak{S}(R_t, S_t)_{t\in T}.$$

Beweis: Gezeigt wird, dass für $(A,B) \in \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ gilt: $\underline{\alpha}_t\alpha_t(A,B) = (A^{R_t\circ S_t I}, A^{R_t\circ S_t})$. Zunächst ist α_t die residuale Abbildung zu $\underline{\alpha}_t$, denn für $x \in V$ und $y \in V_t$ hat man mittels der Beziehungen vor Hilfssatz 46:

$$\begin{aligned}&y \le \alpha_t x \Longrightarrow \underline{\alpha}_t y \le \underline{\alpha}_t\alpha_t x \le x,\\ &\underline{\alpha}_t y \le x \Longrightarrow \begin{cases} y = \alpha_t\underline{\alpha}_t y \le \alpha_t x & \text{für } y \in \alpha_t[V] \text{ und}\\ x = 1 \Longrightarrow y \le \alpha_t x = 1 & \text{für } y \in V_t \setminus \alpha_t[V]\end{cases}\end{aligned}$$

Die letzte Beziehung folgt, da α_t Vollhomomorphismus ist und daher $\alpha_t 1 = 1$ gilt. Nach Satz 33 ist $R_{\underline{\alpha}_t} = R^{\alpha_t} = S_t$ und somit auch $\underline{\alpha}_t(C,D) = (C^{S_t I}, C^{S_t})$ für $(C,D) \in V_t$. Es folgt mit $\alpha_t(A,B) = (B^{S_t}, A^{R_t}) = (A^{R_t I_t}, A^{R_t})$:

$$\underline{\alpha}_t\alpha_t(A,B) = \underline{\alpha}_t(A^{R_t I_t}, A^{R_t}) = (A^{R_t I_t S_t I}, A^{R_t I_t S_t}) = (A^{R_t\circ S_t I}, A^{R_t\circ S_t}).$$

Die Grundmengen von $\mathfrak{S}(\alpha_t \mid t \in T)$ und $\mathfrak{S}(R_t, S_t)_{t\in T}$ sind also identisch. ∎

In einem Begriffsverband $V = \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ stimmen also die beiden relativen sup-Unterhalbverbände $\mathfrak{S}(\alpha_t \mid t \in T)$ und $\mathfrak{S}(R_t, S_t)_{t\in T}$ überein. Satz 56 ist daher die begriffsanalytische Entsprechung von Satz 48 (bzw. [11], Satz 1.2).

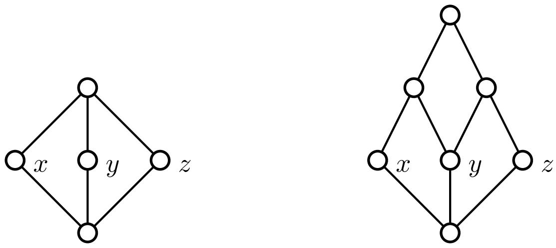


Abb. 5.1: Zwei Verbände mit supremum-dichter Teilmenge $T := \{x, y, z\}$

Als nächstes soll [11], Satz 1.4 (hier Satz 49) diskutiert werden. Der Satz zeigt, dass in dem partiellen sup-Unterhalbverband $\mathfrak{S}(\alpha_t \mid t \in T)$ eines Verbandes V tatsächlich genügend Informationen stecken, um den zugehörigen Verband eindeutig zu konstruieren. Die Supremum-Dichtheit nach Satz 1.2 (hier Satz 48) reicht dafür i. Allg. nicht aus, wie das Beispiel in Abb. 5.1 zeigt: Zwei voneinander verschiedene vollständige Verbände haben jeweils die dreielementige Antikette $T := \{x, y, z\}$ als supremum-dichte Teilmenge.
Handelt es sich bei V jedoch um einen Begriffsverband und kennt man Umfänge und Inhalte aller Begriffe einer supremum-dichten Teilmenge T, so kann man mit Hilfe des Hauptsatzes der Formalen Begriffsanalyse alle Suprema berechnen und erhält eindeutig (bis auf reduzible Gegenstände) den zugehörigen Begriffsverband V. Auch einen Kontext zu diesem Begriffsverband kann man leicht angeben. Bezeichnet G die Menge aller Gegenstände der Begriffe von T und M die Menge aller Merkmale und setzt man $I := \bigcup_{(A,B)\in T} A \times B$, so ist $\mathbb{K}$ ein Kontext von V.
Es sei nun von einem Begriffsverband V die Menge $U := \mathfrak{S}(R_t, S_t)_{t\in T}$ nur mit ihrer Struktur als partieller sup-Unterhalbverband gegeben, jedoch ohne Umfänge und Inhalte. Da nach Satz 49 der Verband dadurch eindeutig bestimmt ist, muss auch ein Kontext ablesbar sein. Da $\mathrm{Id}(U)$, der Verband aller Ideale von U, isomorph zu V ist, ist $(\mathrm{Id}(U), \mathrm{Id}(U), \subseteq)$ ein Kontext, dessen Begriffsverband ebenfalls isomorph zu V ist. Dieser Kontext entspricht $(V, V, \leq)$.
I. Allg. lassen sich zu einem Begriffsverband wesentlich kleinere Kontexte angeben. Zumindest die Seite der Gegenstände kann auch hier reduziert werden. Betrachtet wird dafür die Menge aller Hauptideale von U, das sind Mengen der Form $I_x := \{y \in U \mid y \leq x\}$ für $x \in U$. Die Hauptideale bilden eine supremum-dichte Teilmenge von $\mathrm{Id}(U)$. Sie sind selbst Ideale und für jedes Ideal $I \in \mathrm{Id}(U)$ hat man $I = \sup\{I_x \mid x \in I\}$. Bezeichnet man mit $\mathfrak{H}(U) := \{I_x \mid x \in U\}$ die Menge aller Hauptideale von U, so ist $(\mathfrak{H}(U), \mathrm{Id}(U), \subseteq)$ ebenfalls ein Kontext, dessen zugehöriger Begriffsverband isomorph zu V ist.

5.3 Das Gerüst eines formalen Kontextes

In [11], Abschn. 2 (hier 5.1) wird das Gerüst eines vollständigen Verbandes endlicher Länge erklärt. Im Weiteren wird diese Definition für Begriffsverbände übernommen und dabei auf doppelt fundierte Begriffsverbände ausgeweitet. Dazu wird die Konstruktion des Gerüstes aus einem gegebenen Kontext heraus erklärt. In Verbänden endlicher Länge lassen sich Suprema (Infima) über beliebige Mengen immer durch Suprema (Infima) über nichtleere endliche Mengen ausdrücken. Daher fallen einige Begriffe für Verbände mit ihren Entsprechungen für vollständige Verbände zusammen. So ist z. B. ein Verband endlicher Länge genau dann subdirekt irreduzibel, wenn er auch vollständig subdirekt irreduzibel ist. Nach dem

Satz von Birkhoff ist jeder Verband subdirektes Produkt von subdirekt irreduziblen Faktoren (vgl. [1], Kap. VIII.8, Theorem 15). Jeder vollständige Verband endlicher Länge ist demnach vollständig subdirektes Produkt vollständig subdirekt irreduzibler Faktoren. Dieser Vorteil wird für die Defintion des Gerüstes bei [11] genutzt, wenn die Existenz von „genügend vielen“ (vollständig) subdirekt irreduziblen Faktorverbänden gefordert wird, mittels derer sich eine Menge trennender Vollhomomorphismen bilden lässt.
I. Allg. ist ein vollständig subdirekt irreduzibler Verband nicht unbedingt auch subdirekt irreduzibel. Es gelten aber u. a. folgende Implikationen für einen vollständigen Verband V:

- Ist $\theta \in \mathrm{Con_v}\, V$ (d. h., θ ist eine vollständige Kongruenz auf V), so gilt auch $\theta \in \mathrm{Con}\, V$.
- Ist V vollständig subdirektes Produkt von vollständigen Verbänden V_t $(t \in T)$, so ist V auch subdirektes Produkt der Verbände V_t.
- Ist V subdirekt irreduzibel, so ist V auch vollständig subdirekt irreduzibel.

Für doppelt fundierte vollständige Verbände hat man zusätzlich die wichtige Eigenschaft aus Satz 2.6.: Jeder doppelt fundierte vollständige Verband besitzt eine vollständig subdirekte Zerlegung in vollständig subdirekt irreduzible Faktoren. Also müssen sich auch in doppelt fundierten vollständigen Verbänden „genügend viele“ vollständig subdirekt irreduzible Faktoren finden, mittels derer man trennende Bindungen erhält. Die Konstruktion eines Gerüstes ist demnach ebenso möglich wie bei Verbänden endlicher Länge.
Es sei $\mathbb{K}$ ein Kontext und $\mathbb{L} := (H, N, J)$ ein verträglicher Teilkontext von $\mathbb{K}$ mit $J := I \cap (H \times N)$. Zu einem solchen Teilkontext erhält man auf einfache Weise ein Bindungspaar (R, S) mit $R \subseteq G \times N$ und $S \subseteq H \times M$ durch

$$R := I \cap (G \times N) \quad \text{bzw.} \quad S := I \cap (H \times M).$$

Nachzuweisen sind die Bindungseigenschaften: Dass $\mathbb{L}$ verträglich ist, heißt, dass die Einschränkung $(A \cap H, B \cap N)$ eines jeden Begriffes (A, B) von $\mathbb{K}$ ein Begriff von $\mathbb{L}$ ist. Ist also $g \in G$, so ist die Einschränkung des zu g gehörigen Gegenstandsinhalts $g^I \cap N$ ein Inhalt von $\mathbb{L}$. Nach Definition von R ist $g^I \cap N = g^{I \cap (G \times N)} = g^R$. Für ein Merkmal $n \in N$ hat man $n^R = n^{I \cap (G \times N)} = n^I$. Folglich ist n^R ein Umfang von $\mathbb{K}$ und R also eine Bindung von $\mathbb{K}$ zu $\mathbb{L}$. Dual zeigt man, dass S eine Bindung von $\mathbb{L}$ zu $\mathbb{K}$ ist.

<u>Behauptung:</u> Für $(A, B) \in \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ gilt $A^{RJ} = B^S$.
Man hat: $A^{RJ} = (A^I \cap N)^J = (B \cap N)^J$ und $B^S = B^I \cap H = A \cap H$. Da $\mathbb{L}$ verträglich ist, ist die Einschränkung von (A, B) auf $(A \cap H, B \cap N)$ ein Begriff von $\mathbb{L}$ und man hat insgesamt: $A^{RJ} = (B \cap N)^J = A \cap H = B^S$. Bevor diese Ergebnisse in Satz 59 zusammengefasst werden, wird noch folgende Bezeichnung eingeführt:

Definition 58 Eine Familie von Teilkontexten $\mathbb{K}_t$ $(t \in T)$ eines Kontextes $\mathbb{K}$ hat die *Überdeckungseigenschaft*, falls gilt:

$$\bigcup_{t \in T} G_t = G \quad \text{und} \quad \bigcup_{t \in T} M_t = M. \diamond$$

Satz 59 *Sind $\mathbb{K}_t$ $(t \in T)$ verträgliche Teilkontexte eines Kontextes $\mathbb{K}$ mit der Überdeckungseigenschaft, so sind*

$$\{(R_t, S_t) \mid R_t = I \cap (G \times M_t), S_t = I \cap (G_t \times M), t \in T\}$$

trennende Bindungen zwischen $\mathbb{K}$ und $\mathbb{K}_t$ $(t \in T)$.

Beweis: Es ist nur noch die Trennungseigenschaft der Bindungspaare nachzuweisen (vgl. Definition 54). Diese folgt direkt aus der Überdeckungseigenschaft: Es seien A und C Umfänge von $\mathbb{K}$ und $A^{R_t} = C^{R_t}$ gelte für alle $t \in T$. Ist nun $m \in A^I$, so existiert nach Voraussetzung ein $t \in T$ mit $m \in M_t$. Nach Definition von R_t ist dann $m \in A^{R_t}$. Wegen der angenommenen Identität ist auch $m \in C^{R_t} \subseteq C^I$. Folglich ist $A^I \subseteq C^I$ und mit der umgekehrten Argumentation erhält man insgesamt $A^I = C^I$. Damit ist $A = A^{II} = C^{II} = C$. Die Bindungen sind also tatsächlich trennend. ■

Um einem Verband sein Gerüst eindeutig zuzuordnen, wählt man in [11] alle Vollhomomorphismen auf vollständig subdirekt irreduzible Faktorverbände aus und erhält eine eindeutig bestimmte Menge trennender Vollhomomorphismen. Um zu einem Kontext eindeutig ein Gerüst mittels verträglicher Teilkontexte zu konstruieren, muss eine eindeutig bestimmbare Menge solcher Teilkontexte ausgewählt werden. Da verträgliche Teilkontexte bestimmten Faktoren des zugehörigen Verbandes entsprechen, sollen gerade die Teilkontexte ausgewählt werden, die vollständig subdirekt irreduzible Faktoren induzieren. Satz 2.6. zeigt, dass doppelt fundierte vollständige Verbände in vollständig subdirekt irreduzible Faktoren zerlegbar sind. Diese Zerlegung auf der Ebene des Kontextes beschreibt das nächste Resultat (s. [5], Hilfssatz 61).

Hilfssatz 60 *Ist $\mathbb{K}$ ein reduzierter Kontext eines doppelt fundierten Begriffsverbandes, so entsprechen die vollständig subdirekten Zerlegungen von $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ eindeutig den Familien pfeilabgeschlossener Teilkontexte, die die Überdeckungseigenschaft haben.*

Die Teilkontexte vollständig subdirekt irreduzibler Faktoren lassen sich in reduzierten Kontexten von doppelt fundierten vollständigen Verbänden mit Hilfe der Pfeilrelationen ablesen, wie Hilfssatz 61 (vgl. [5], Hilfssatz 62) zeigt:

Hilfssatz 61 *Ein reduzierter Kontext $\mathbb{K}$ eines doppelt fundierten Begriffsverbandes $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ ist genau dann 1-erzeugt, wenn $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ vollständig subdirekt irreduzibel ist.*

Definition 62 Ist $\mathbb{K}$ ein reduzierter Kontext eines doppelt fundierten Begriffsverbandes, ist weiter $\langle g \rangle_{\mathbb{K}} = (G_g, M_g, I_g)$ für $g \in G$ und sind $R_g := I \cap (G \times M_g)$ und $S_g := I \cap (G_g \times M)$, so bezeichnet

$$\mathfrak{S}(\mathbb{K}) := \mathfrak{S}(R_g, S_g)_{g \in G} = \{(A^{R_t \circ S_t I}, A^{R_t \circ S_t}) \mid (A, B) \in \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}), t \in T\} \setminus \{(M^I, M)\}$$

einen relativen sup-Unterhalbverband von $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$, der das *Gerüst* des Kontextes $\mathbb{K}$ genannt wird. ◇

Alle Voraussetzungen von Satz 59 sind erfüllt, die Paare (R_g, S_g) sind trennende Bindungen und das Gerüst damit wohldefiniert.
Eine Vereinfachung dieser Definition wird in Satz 71 angegeben. In Definition 72 wird Definition 62 noch erweitert: Die Elemente des Gerüstes, die durch den Kontext $\langle g \rangle_{\mathbb{K}}$ erzeugt werden, bilden die zu g gehörige *Komponente* des Gerüstes. Auch eine Beschreibung des Gerüstes durch subirreduzible Elemente (wie in Definition 51) wird im Weiteren angegeben (s. Definition 66 und Folgerung 67).

Folgerung 63 *Ist $\mathbb{K}$ ein reduzierter Kontext eines doppelt fundierten Begriffsverbandes, so ist $\gamma[G] \subseteq \mathfrak{S}(\mathbb{K})$.*

Beweis: Nach Satz 56 ist $\mathfrak{S}(\mathbb{K})$ supremum-dicht in $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$. Im reduzierten Kontext ist jedoch jeder Gegenstandsbegriff sup-irreduzibel und folglich nur dann als Supremum einer Menge von Begriffen aus $\mathfrak{S}(\mathbb{K})$ darstellbar, wenn er selbst darin enthalten ist. ■

Satz 64 *Für einen reduzierten Kontext $\mathbb{K}$ eines Begriffsverbandes endlicher Länge entspricht das Gerüst des Kontextes $\mathfrak{S}(\mathbb{K})$ dem Gerüst des Verbandes $\mathfrak{S}(\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}))$.*

Beweis: Es ist bereits fast alles gezeigt. Die 1-erzeugten Teilkontexte entsprechen den (bei Verbänden endlicher Länge auch vollständig) subdirekt irreduziblen Faktorverbänden (s. Hilfssatz 61). Die trennenden Bindungen (R_g, S_g) entsprechen trennenden Vollhomomorphismen α_g und damit entsprechen sich auch $\mathfrak{S}(R_g, S_g)_{g\in G}$ und $\mathfrak{S}(\alpha_g \mid g \in G)$. Es bleibt nur nachzuweisen, dass die zu (R_g, S_g) gehörigen Abbildungen auch surjektiv sind, denn dann entspricht $\mathfrak{S}(\alpha_g \mid g \in G)$ tatsächlich dem Gerüst von $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ (vgl. Bemerkung 52). Dazu wird Satz 42 herangezogen. Die Bindung $R_g := I \cap (G \times M_g)$ (vgl. Definition 62) erfüllt die Bedingung $(\mathbf{Sur}_{\mathrm{sup}})$, denn für einen beliebigen Gegenstand $h \in G_g \subseteq G$ gilt $h^{R_g} = h^I \cap M_g = h^{I_g}$. Folglich sind die zu (R_g, S_g) $(g \in G)$ gehörigen Vollhomomorphismen surjektiv. Insgesamt folgt, dass das Gerüst eines reduzierten Kontextes $\mathfrak{S}(\mathbb{K})$ (nach Definition 62) gleich dem Gerüst des zugehörigen Begriffsverbandes $\mathfrak{S}(\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}))$ (nach Definition 51) ist. ■

Die Surjektivität der zu den Bindungen gehörigen Vollhomomorphismen erlaubt folgende Vereinfachung der Gerüstdefinition.

Hilfssatz 65 *Ist $\mathbb{K}$ ein reduzierter Kontext eines doppelt fundierten Begriffsverbandes und ist $\langle g\rangle_{\mathbb{K}} = (G_g, M_g, I_g)$ für $g \in G$, so ist*

$$\mathfrak{S}(\mathbb{K}) = \bigcup_{g\in G} \{(C^{II}, C^I) \mid (C, C^{I_g}) \in \underline{\mathfrak{B}}(\langle g\rangle_{\mathbb{K}}), C^{I_g} \neq M_g\}.$$

Beweis: Es seien $R_g := I \cap (G \times M_g)$ und $S_g := I \cap (G_g \times M)$. Dann ist

$$\mathfrak{S}(\mathbb{K}) = \bigcup_{g\in G} \{(A^{R_gI_gS_gI}, A^{R_gI_gS_g}) \mid (A, B) \in \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})\} \setminus \{(M^I, M)\}$$

(vgl. Definition 62 und Hilfssatz 35.2.). Für $g \in G$ ist wegen der oben nachgewiesenen Surjektivität die Menge $\{(A^{R_gI_g}, A^{R_g}) \mid (A, B) \in \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})\}$ gerade die Menge aller Begriffe von $\langle g\rangle_{\mathbb{K}}$. Folglich ist

$$\{(A^{R_gI_gS_gI}, A^{R_gI_gS_g}) \mid (A, B) \in \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})\} = \{(C^{S_gI}, C^{S_g}) \mid (C, C^{I_g}) \in \underline{\mathfrak{B}}(\langle g\rangle_{\mathbb{K}})\}$$

und damit

$$\mathfrak{S}(\mathbb{K}) = \bigcup_{g\in G} \{(C^{S_gI}, C^{S_g}) \mid (C, C^{I_g}) \in \underline{\mathfrak{B}}(\langle g\rangle_{\mathbb{K}})\} \setminus \{(M^I, M)\}.$$

Wegen $C \subseteq G_g$ hat man ferner $C^{S_g} = C^{I\cap(G_g\times M)} = C^I$ und damit

$$\mathfrak{S}(\mathbb{K}) = \bigcup_{g\in G} \{(C^{II}, C^I) \mid (C, C^{I_g}) \in \underline{\mathfrak{B}}(\langle g\rangle_{\mathbb{K}})\} \setminus \{(M^I, M)\}.$$

Ist $(C^{II}, C^I) = (M^I, M)$, so folgt aus $C^I = M$ sofort $C^{I_g} = M_g$. Gilt umgekehrt $C^{I_g} = M_g$ für einen Umfang C von $\mathbb{L}$, so ist (C^{II}, C^I) der kleinste Begriff von $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$, dessen Einschränkung auf $\mathbb{L}$ den kleinsten Begriff von $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{L})$ ergibt. Folglich ist $(C^{II}, C^I) = (M^I, M)$. ■

Auch eine Beschreibung des Gerüstes mittels subirreduzibler Elemente lässt sich nun für $\mathfrak{S}(\mathbb{K})$ angeben:

Definition 66 Es sei $\mathbb{K}$ ein reduzierter Kontext eines doppelt fundierten Begriffsverbandes. Ein Begriff (A,B) von $\mathbb{K}$ mit $B \neq M$ heißt *subirreduzibel*, wenn es einen 1-erzeugten pfeilabgeschlossenen Teilkontext $\mathbb{L} := (H,N,J)$ gibt, so dass gilt:

$$(A,B) = ((A \cap H)^{II}, (A \cap H)^{I}). \diamond$$

Folgerung 67 *Ist $\mathbb{K}$ ein reduzierter Kontext eines doppelt fundierten Begriffsverbandes, so ist $\mathfrak{S}(\mathbb{K})$ die Menge aller subirreduziblen Begriffe von $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$.*

Beweis: Es sei (A,B) subirreduzibel. Nach Hilfssatz 7 ist $(A \cap H, B \cap N)$ ein Begriff von $\mathbb{L}$. Ferner gibt es einen Gegenstand $g \in G$ mit $\mathbb{L} := \langle g \rangle_{\mathbb{K}}$. Nach Hilfssatz 65 gehört (A,B) also zum Gerüst von $\mathbb{K}$. Ist andererseits $(A,B) \in \mathfrak{S}(\mathbb{K})$, so existieren nach Hilfssatz 65 ein $g \in G$ und $(C,D) \in \underline{\mathfrak{B}}(\langle g \rangle_{\mathbb{K}})$, so dass $(C^{II}, C^{I}) = (A,B)$ ist. Folglich hat man $C \subseteq A \cap G_g$ und somit $(C,D) \leq (A \cap G_g, B \cap M_g)$. Es ist aber auch $D = C^{I_g} \subseteq C^{I} = B$, also $D \subseteq B \cap M_g$ und damit $(C,D) \geq (A \cap G_g, B \cap M_g)$. Insgesamt hat man $(A,B) = (C^{II}, C^{I}) = ((A \cap G_g)^{II}, (A \cap G_g)^{I})$, also ist (A,B) subirreduzibel (für $\mathbb{L}$ wählt man $\langle g \rangle_{\mathbb{K}}$). ■

Um Definition 66 zu rechtfertigen, wird gezeigt, dass die subirreduziblen Elemente in einem Begriffsverband endlicher Länge genau den subirreduziblen Elementen nach [11] (hier Definition 51) entsprechen.

Satz 68 *Für Verbände endlicher Länge entspricht Definition 66 der in [11] auf S. 56 angegeben Definition für subdirekt irreduzible Elemente.*

Beweis: Nach [11] heißt $(A,B) \in \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ mit $B \neq M$ genau dann subirreduzibel, wenn es einen (vollständig) subdirekt irreduziblen Verband $\bar{V}$ und einen surjektiven Vollhomomorphismus $\alpha : \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}) \to \bar{V}$ mit $(A,B) = \underline{\alpha}\alpha(A,B)$ gibt. Dem Homomorphiesatz zufolge kann für $\bar{V}$ immer ein Faktorverband von $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ und damit für α die entsprechende Projektion (der natürliche Homomorphismus) verwendet werden. Damit entspricht $\bar{V}$ gerade einem 1-erzeugten pfeilabgeschlossenen Teilkontext $\mathbb{L} := (H,N,J)$ und α der Abbildung $(A,B) \mapsto (A \cap H, B \cap N)$ (vgl. Hilfssatz 7). Umgekehrt entspricht jedem 1-erzeugten pfeilabgeschlossenen Teilkontext ein (vollständig) subdirekt irreduzibler Faktorverband $\bar{V}$. Es ist nun $(A,B) = \underline{\alpha}\alpha(A,B)$ genau dann, wenn (A,B) das kleinste Element von $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ ist, das von α auf $\alpha(A,B) = (A \cap H, B \cap N)$ abgebildet wird. Letzteres ist das kleinste Element von $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$, dessen Umfang $A \cap H$ enthält. Dieses ist $((A \cap H)^{II}, (A \cap H)^{I})$. Damit ist Definition 66 konsistent mit der Definition aus [11] und erweitert diese. ■

Folgerung 69 *Es seien $\mathbb{K}$ ein reduzierter Kontext eines doppelt fundierten vollständigen Verbandes und $\mathbb{L} := (H,N,J)$ ein pfeilabgeschlossener Teilkontext. Dann gilt $C^{II} \cap H = C$ für jeden Umfang C von $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{L})$.*

Beweis: Es sei $(A,B) = (C^{II}, C^{I})$. Man schließt $(A \cap H, B \cap N) = (C, C^{J})$ wie im Beweis von Folgerung 67. ■

Folgerung 70 *Es sei $\mathbb{K}$ ein reduzierter Kontext eines doppelt fundierten Begriffsverbandes und $\mathbb{L} := (H,N,J)$ ein pfeilabgeschlossener Teilkontext. Durch $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{L}) \to \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}) : (A,B) \mapsto (A^{II}, A^{I})$ werden Gegenstandsbegriffe von $\mathbb{L}$ auf Gegenstandsbegriffe von $\mathbb{K}$ abgebildet.*

Beweis: Es sei $\gamma_{\mathbb{L}} h = (A,B)$ für $h \in H$. Dann ist $h \in A^{II}$ und folglich gilt $\gamma_{\mathbb{K}} h \leq (A^{II}, A^{I})$. Andererseits ist $\gamma_{\mathbb{K}} h$ der kleinste Begriff von $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$, dessen Umfang h enthält. Demnach ist $h^{II} \cap H$ der kleinste Umfang von $\mathbb{L}$, der h enthält (vgl. Hilfssatz 7). Folglich gilt $h^{II} \cap H = A$ und $(h^{II} \cap H)^{II} = A^{II}$ und es folgt $h^{II} \supseteq A^{II}$, also $\gamma_{\mathbb{K}} h \geq (A^{II}, A^{I})$. ■

5.4 Eigenschaften von Gerüsten

Konstruiert man das Gerüst zu einem Kontext nach Definition 62, so muss zu jedem Gegenstand der zugehörige abgeschlossene Teilkontext bestimmt werden. Im folgenden Satz wird gezeigt, dass dies nicht unbedingt notwendig ist. Vielmehr genügt es, eine Menge 1-erzeugter Teilkontexte zu betrachten, die die Überdeckungseigenschaft hat (vgl. Definition 58).

Satz 71 *Es sei $\mathbb{K}$ ein reduzierter Kontext eines doppelt fundierten vollständigen Verbandes und es seien $\mathbb{K}_t$ $(t \in T)$ 1-erzeugte Teilkontexte von $\mathbb{K}$ mit der Überdeckungseigenschaft. Ferner seien $R_t := I \cap (G \times M_t)$ und $S_t := I \cap (G_t \times M)$ $(t \in T)$. Dann ist*

$$\mathfrak{S}(\mathbb{K}) = \mathfrak{S}(R_t, S_t)_{t \in T} = \bigcup_{t \in T} \{(C^{II}, C^I) \mid (C, C^{I_t}) \in \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_t), C^{I_t} \neq M_t\}.$$

Beweis: $\mathfrak{S}(R_t, S_t)_{t\in T} \subseteq \mathfrak{S}(\mathbb{K})$ ergibt sich per Definition. Es sei also $(A, B) \in \mathfrak{S}(\mathbb{K})$. Dann ist $B \neq M$ und es gibt nach Folgerung 67 einen Gegenstand $g \in G$ mit $\langle g \rangle_{\mathbb{K}} = (G_g, M_g, I_g)$, so dass $(A, B) = ((A \cap G_g)^{II}, (A \cap G_g)^I)$ gilt. Da die $\mathbb{K}_t$ $(t \in T)$ die Überdeckungseigenschaft haben, existiert ein $s \in T$, so dass $g \in G_s$ ist. Weil $\mathbb{K}_s$ pfeilabgeschlossen ist, ist $\langle g \rangle_{\mathbb{K}}$ ein Teilkontext von $\mathbb{K}_s$ (es gilt also $G_g \subseteq G_s \subseteq G$) und man hat:

$$A = (A \cap G_g)^{II} \subseteq (A \cap G_s)^{II} \subseteq A^{II} = A$$

und somit

$$A = (A \cap G_s)^{II} = (A^I \cap M_s)^{I_s II} = A^{R_s I_s II} = A^{R_s I_s S_s I}.$$

Es ist also $(A, B) = (A^{R_s I_s S_s I}, A^{R_s I_s S_s}) \in \mathfrak{S}(R_t, S_t)_{t \in T}$ (vgl. Satz 56).
Die zweite Darstellung erhält man analog zu Hilfssatz 65. ■

Satz 71 motiviert die Wahl maximaler 1-erzeugter Teilkontexte $\mathbb{K}_t$ mit der Überdeckungseigenschaft. D. h., ist ein 1-erzeugter Teilkontext $\mathbb{K}_s$ von $\mathbb{K}$ auch echter Teilkontext eines 1-erzeugten Teilkontextes $\mathbb{K}_t$ von $\mathbb{K}$, dann wird $\mathbb{K}_s$ nicht für die Gerüstkonstruktion verwendet. In endlichen Kontexten gibt es immer maximale 1-erzeugte Teilkontexte. Für Kontexte mit unendlich großer Gegenstands- und Merkmalsmenge ist die Frage jedoch offen (vgl. Kap. 7, Problem 2).
Die Darstellung als Vereinigung von Mengen, deren Elemente von je einem Teilkontext erzeugt werden, motiviert die nachfolgende Definition.

Definition 72 Es sei $\mathbb{K}$ ein reduzierter Kontext eines doppelt fundierten vollständigen Verbandes und es seien $\mathbb{K}_t$ $(t \in T)$ 1-erzeugte Teilkontexte von $\mathbb{K}$ mit der Überdeckungseigenschaft. Die Mengen

$$\{(C^{II}, C^I) \mid (C, C^{I_t}) \in \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_t), C^{I_t} \neq M_t\} \ (t \in T)$$

heißen *Komponenten* des Gerüstes bezüglich der Teilkontexte $\mathbb{K}_t$. ⋄

Der Begriff der Komponente des Gerüsts stammt aus [4]. Man beachte, dass man für unterschiedliche der Wahl der Familien $\mathbb{K}_t$ unterschiedliche Komponenten erhält.
Weder die Komponenten noch die gewählten Teilkontexte müssen i. Allg. notwendigerweise disjunkt sein. Im Fall modularer Begriffsverbände kann das jedoch erreicht werden. Die Disjunktheit der Teilkontexte folgt sofort aus Hilfssatz 17. Der folgende Satz klärt die Frage für die Komponenten - zumindest für längenendliche modulare Begriffsverbände.

Satz 73 *Ist $\mathbb{K}$ ein reduzierter Kontext eines längenendlichen, modularen Begriffsverbandes, dann sind die Komponenten verschiedener Teilkontexte von $\mathfrak{S}(\mathbb{K})$ paarweise disjunkt.*

Beweis: Da je zwei 1-erzeugte Teilkontexte disjunkt sind, müssen alle 1-erzeugten Teilkontexte zur Gerüstkonstruktion verwendet werden, damit die Überdeckungseigenschaft erfüllt ist (vgl. Satz 71). Nach Folgerung 28 entspricht einem 1-erzeugten Teilkontext genau eine Äquivalenzklasse projektiver Primintervalle und er trennt alle Intervalle dieser Klasse und keine weiteren (Hilfssatz 24). Da die Zuordnung eineindeutig ist (Satz 27), wird jedes Primintervall von $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ von genau einem der Teilkontexte getrennt. Gehöre nun (A, B) zur Komponente eines 1-erzeugten Teilkontextes $\mathbb{K}_s$, d. h. $(A, B) = ((A \cap G_s)^{II}, (A \cap G_s)^I)$. Da $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ längenendlich ist, gibt es eine endliche Kette zwischen $(\emptyset^{II}, \emptyset^I)$ und (A, B) und damit einen unteren Nachbarn (C, D) von (A, B). Da $((A \cap G_s)^{II}, (A \cap G_s)^I)$ der kleinste Begriff ist, dessen Umfang $(A \cap G_s)$ enthält, hat man $(C \cap G_s) < (A \cap G_s)$. Folglich trennt $\mathbb{K}_s$ das Primintervall $[(C, D), (A, B)]$. Gehört (A, B) auch zu $\mathbb{K}_t$, so trennt auch $\mathbb{K}_t$ dieses Primintervall und nach obiger Betrachtung folgt $\mathbb{K}_s = \mathbb{K}_t$. ■

Das Resultat entspricht der Bemerkung 53 zu modularen Verbänden endlicher Länge. Die zusätzliche Voraussetzung, die dort gemacht wird, kann hier entfallen, wenn man verschiedene Teilkontexte betrachtet. Außerdem wird auch hier die Gültigkeit der Aussage ausgeweitet, allerdings nur auf längenendliche modulare Verbände. Da im Beweis Primintervalle vorausgesetzt werden, muss es im Verband endliche Ketten geben. Das Resultat kann deshalb nicht einfach auf doppelt fundierte vollständige Verbände übertragen werden.

5.5 Vollständig subdirekte Produkte von Begriffsverbänden

In [11] spielen die Abbildungen $\alpha_{st} = \alpha_s \circ \underline{\alpha_t} : V_t \to V_s$ zwischen homomorphen Bildern V_s und V_t eines vollständigen Verbandes V eine wichtige Rolle (hier z. B. in Satz 50). Nach Satz 36 entspricht α_{st} gerade das Bindungsprodukt der zu α_s und $\underline{\alpha_t}$ gehörigen Bindungen. Diese Bindungen kann man im Kontext wiederfinden.

Satz 74 *Es seien $\mathbb{K}$ ein Kontext eines doppelt fundierten vollständigen Verbandes und $\mathbb{K}_s$ und $\mathbb{K}_t$ verträgliche Teilkontexte von $\mathbb{K}$. Sind ferner $R_t := I \cap (G \times M_t)$ und $S_s := I \cap (G_s \times M)$, so ist $I_{st} := I \cap (G_s \times M_t)$ eine Bindung von $\mathbb{K}_s$ zu $\mathbb{K}_t$ und es ist $I_{st} = S_s \circ R_t$.*

Beweis: Nach Satz 59 sind R_t und S_s Bindungen und nach Hilfssatz 35.4. ist das Produkt zweier Bindungen selbst wieder eine Bindung. Es genügt also, die behauptete Gleichung zu zeigen. Für $g \in G_s$ ist $g^{S_s I R_t} = g^{IIR_t} = g^{R_t} = g^I \cap M_t$. Die mittlere Identität folgt aus Hilfssatz 32. Wegen Hilfssatz 35.2. ist somit $g^{S_s \circ R_t} = g^{S_s I R_t} = g^I \cap M_t$ und es ist

$$S_s \circ R_t = \{(g, m) \in G_s \times M_t \mid m \in g^I \cap M_t\} = I_{st}.$$

Damit ist alles gezeigt. ■

Satz 77 ermöglicht eine Charakterisierung von Kontexten vollständig subdirekter Produkte. Es gibt dazu bereits Resultate bei [5], die sich auf Teilrelationen von Summenkontexten beziehen: Hilfssatz 82 und Satz 32, die hier als Hilfssatz 75 und Satz 76 zitiert werden.

Hilfssatz 75 *Die vollständig subdirekten Produkte von Begriffsverbänden $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_t)$ $(t \in T)$ entsprechen eineindeutig den abgeschlossenen Relationen J des Summenkontextes $\sum_{t \in T} \mathbb{K}_t$ mit $J \cap (G_t \times M_t) = I_t$ $(t \in T)$.*

Satz 76 *Für eine Teilrelation $J \subseteq I$ im Summenkontext $\mathbb{K} = \sum_{t \in T} \mathbb{K}_t$ sind äquivalent:*

1. *J ist eine abgeschlossene Relation und entspricht einem vollständig subdirekten Produkt der $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_t)$ $(t \in T)$.*

2. *J ist eine abgeschlossene Relation und für alle $t \in T$ gilt $I_t = J_{tt} := J \cap (G_t \times M_t)$.*

3. *Für alle $r, s, t \in T$ ist $J_{st} := J \cap (G_s \times M_t)$ eine Bindung von $\mathbb{K}_s$ zu $\mathbb{K}_t$ und es gelten $J_{tt} = I_t$ und $J_{rt} \subseteq J_{rs} \circ J_{st}$.*

Dieser Satz (speziell 1. $\iff$ 3.) ist im Wesentlichen die begriffsanalytische Entsprechung von [11], Satz 3.2 (hier Satz 50). Die Bindungen J_{st} entsprechen den Abbildungen α_{ts} und nach Hilfssatz 41 entsprechen die zwei Bedingungen der Bindungen den zwei Bedingungen der α_{ts} in Satz 50. Da der Satz bereits in [5] bewiesen und erklärt wird, soll hier nur folgende Umformulierung, die auf die Voraussetzung Summenkontext verzichtet, gezeigt werden.

Satz 77 *Es sei $\mathbb{K}$ ein Kontext und es seien $\mathbb{K}_t$ $(t \in T)$ Teilkontexte von $\mathbb{K}$. $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ ist genau dann ein vollständig subdirektes Produkt der Begriffsverbände $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_t)$ $(t \in T)$, wenn die $\mathbb{K}_t$ die Überdeckungseigenschaft haben und für alle $r, s, t \in T$ die Relationen $I_{st} := I \cap (G_s \times M_t)$ Bindungen sind und $I_{rt} \subseteq I_{rs} \circ I_{st}$ gilt.*

Beweis: Es seien $\bar{\mathbb{K}}_t = (\bar{G}_t, \bar{M}_t, \bar{I}_t)$ mit

$$\bar{G}_t = G_t \times \{t\}, \quad \bar{M}_t = M_t \times \{t\} \quad \text{und} \quad \bar{I}_t := \{((g,t),(m,t)) \mid (g,m) \in I_t\} \ (t \in T).$$

Aus $\mathbb{K}$ wird nun ein Kontext $\mathbb{L}$ konstruiert. Zunächst entsteht

$$\mathbb{L}^1 := (\bigcup_{t \in T} \bar{G}_t, M, I^1) \quad \text{mit} \quad I^1 = \{((g,t),m) \mid (g,m) \in I \text{ und } g \in G_t\}$$

durch Kopieren von Zeilen aus $\mathbb{K}$ (und Umbenennung von Gegenständen). Folglich werden nur reduzible Gegenstände hinzugefügt und daher ist $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{L}^1)$ isomorph zu $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$.
Nun sei $\mathbb{L} := (G_\mathbb{L}, M_\mathbb{L}, J_\mathbb{L})$ wobei

$$G_\mathbb{L} := \bigcup_{t \in T} \bar{G}_t, \ M_\mathbb{L} := \bigcup_{t \in T} \bar{M}_t \ \text{ und } \ J_\mathbb{L} := \{((g,s),(m,t)) \mid (g,m) \in I, g \in G_s \text{ und } m \in G_t\}.$$

$\mathbb{L}$ entsteht aus $\mathbb{L}^1$ durch Kopieren von Spalten, also durch Hinzufügen reduzibler Merkmale, und somit ist $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{L})$ isomorph zu $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{L}^1)$ und damit zu $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$. Da außerdem $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_t)$ isomorph zu $\underline{\mathfrak{B}}(\bar{\mathbb{K}}_t)$ $(t \in T)$ ist, ist $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ vollständig subdirektes Produkt der $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_t)$ genau dann, wenn $\underline{\mathfrak{B}}(\bar{\mathbb{K}})$ vollständig subdirektes Produkt der $\underline{\mathfrak{B}}(\bar{\mathbb{K}}_t)$ $(t \in T)$ ist. $J_\mathbb{L}$ ist eine Teilrelation im Summenkontext $\sum_{t \in T} \bar{\mathbb{K}}_t$, da $\bar{I}_t \subseteq J_\mathbb{L}$ gilt. Daher ist nach Satz 76 $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{L})$ genau dann vollständig subdirektes Produkt der $\underline{\mathfrak{B}}(\bar{\mathbb{K}}_t)$ $(t \in T)$, wenn $J_{st} := J_\mathbb{L} \cap (\bar{G}_s \times \bar{M}_t)$ Bindung ist von $\bar{\mathbb{K}}_s$ zu $\bar{\mathbb{K}}_t$ und $J_{tt} = \bar{I}_t$ und $J_{rt} \subseteq J_{rs} \circ J_{st}$ für alle $r, s, t \in T$ gilt. Aus der Konstruktion von $\mathbb{L}$ folgt

$$J_{tt} = \{((g,t),(m,t)) \mid (g,m) \in I, g \in G_t \text{ und } m \in G_t\} = \bar{I}_t.$$

Zu zeigen ist damit noch:
1) J_{st} ist Bindung von $\bar{\mathbb{K}}_s$ zu $\bar{\mathbb{K}}_t$ genau dann, wenn I_{st} Bindung von $\mathbb{K}_s$ zu $\mathbb{K}_t$ ist, und
2) $J_{rt} \subseteq J_{rs} \circ J_{st} \iff I_{rt} \subseteq I_{rs} \circ I_{st}$.

Offenbar ist

$$J_{st} = \{((g,s),(m,t)) \mid (g,m) \in I, g \in G_s \text{ und } m \in G_t\} = \{((g,s),(m,t)) \mid (g,m) \in I_{st}\},$$

woraus sofort 1) folgt. 2) ergibt sich wie 1), da $((g,s),(m,t)) \in J_{st} \iff (g,m) \in I_{st}$. ■

Eine Charakterisierung vollständig subdirekter Produkte für reduzierte Kontexte doppelt fundierter vollständiger Verbände liefert auch Hilfssatz 60 in Abschn. 5.3. Anstelle von Bindungen werden dort verträgliche Teilkontexte zur Charakterisierung verwendet. Die weiteren Ergebnisse in [11] beschäftigen sich mit der Konstruktion bestimmter subdirekter Produkte. Diese Ideen sind bereits in [5], Abschn. 5.1 aufgearbeitet und führen zum Begriff des *P-Produkts.*

5.6 Diagramme von Gerüsten

Zur graphischen Veranschaulichung von Verbänden benutzt man meist die Liniendiagramme der dem Verband zu Grunde liegenden geordneten Menge. In diesem Abschnitt wird beschrieben, wie man auch für das Gerüst eines Verbandes ein Diagramm erhält, das dem Liniendiagramm des zugehörigen Verbandes nahe kommt. Gezeichnet werden die Liniendiagramme der Komponenten des Gerüstes und einige Verbindungslinien zwischen diesen, die die Ordnung der Begriffe angeben.
Gegeben seien ein reduzierter Kontext $\mathbb{K}$ eines doppelt fundierten vollständigen Verbandes und pfeilabgeschlossene Teilkontexte $\mathbb{K}_t$ $(t \in T)$ mit der Überdeckungseigenschaft. Nach Bemerkung 72 ist

$$\{(C^{II}, C^{I}) \mid (C, C^{I_t}) \in \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_t), C^{I_t} \neq M_t\}$$

die zu t gehörige Komponente.
Für $(C, C^{I_t}) \in \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_t)$ gilt $C^{II} \cap G_t = C$ nach Folgerung 69. Da sowohl der doppelte Ableitungsoperator als auch die Einschränkung auf G_t ordnungserhaltend sind, ist durch $(C, C^{I_t}) \mapsto (C^{II}, C^{I})$ ein Ordnungsisomorphismus zwischen $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_t) \setminus \{(M_t^{I_t}, M_t)\}$ und der zu t gehörigen Komoponente gegeben. Damit sind auch die beiden sup-Halbverbände zueinander isomorph. Man berechnet in einer Komponente das Supremum von Elementen (A_r^{II}, A_r^{I}) $(r \in R)$ mit $(A_r, A_r^{I_t}) \in \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_t)$ (d. h., alle Elemente gehören zur Komponente von t) durch:

$$\sup\{(A_r^{II}, A_r^{I}) \mid r \in R\} = (C^{II}, C^{I}), \quad \text{wobei} \quad (C, C^{I_t}) = \sup_t \{(A_r, A_r^{I_t}) \mid r \in R\}$$

ist. Dabei ist $\sup_t$ die Supremum-Operation in $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_t)$.
Als nächstes werden die Beziehungen zwischen Elementen verschiedener Komponenten betrachtet. Es seien $(A,B) \in \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_s)$ und $(C,D) \in \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_t)$. Es gilt:

$$(A^{II}, A^{I}) \leq (C^{II}, C^{I}) \iff A^{II} \subseteq C^{II} \iff A \subseteq C^{II}.$$

Die Relation zwischen den Begriffen soll nun ohne den Ableitungsoperator ^{I} beschrieben werden und allein aus den Teilkontexten $\mathbb{K}_s$ und $\mathbb{K}_t$ und den Bindungen $I_{st} = I \cap (G_s \times M_t)$ und $I_{ts} = I \cap (G_t \times M_s)$ (vgl. Abschn. 5.5) ablesbar sein. Man hat wegen $A \subseteq G_s$ und $B \subseteq M_s$:

$$A \subseteq C^{II} \iff A \subseteq C^{II} \cap G_s \iff (A,B) \leq (C^{II} \cap G_s, C^{I} \cap M_s) \iff B \supseteq C^{I_{ts}}$$

und damit die Regel:

$$(A^{II}, A^{I}) \leq (C^{II}, C^{I}) \iff C^{I_{ts}} \subseteq B. \qquad (*)$$

Die Ordnungsrelation der Gerüstelemente wird nun auf die Elemente der Menge

$$\mathfrak{D} := \bigcup_{t \in T} (\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_t) \setminus \{(M^{I_t}, M)\})$$

übertragen. In dieser Menge können verschiedene Elemente zum gleichen Element des Gerüstes gehören, wenn z. B. für $(A,B) \in \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_s)$ und $(C,D) \in \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_t)$ $(A^{II}, A^I) = (C^{II}, C^I)$ gilt. Solche Elemente werden gleichgesetzt, d. h., die Menge $\mathfrak{D}$ wird faktorisiert nach der Äquivalenzrelation:

$$\theta := \{((A,B),(C,D)) \in \mathfrak{D}^2 \mid (A^{II}, A^I) = (C^{II}, C^I)\}.$$

Nach der Regel $(*)$ stehen $(A,B) \in \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_s)$ und $(C,D) \in \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_t)$ genau dann in Relation, wenn $C^{I_{ts}} \subseteq A^{I_s}$ und $A^{I_{st}} \subseteq C^{I_t}$ gilt. Statt der Inklusion kann in beiden Bedingungen offensichtlich auch Identität gefordert werden.
Auf der Faktormenge $\mathfrak{D}/\theta$ ist nun durch

$$[(A,B)]_\theta \leq [(C,D)]_\theta :\iff C^{I_{ts}} \subseteq B$$

eine Ordnung erklärt. Nach der Regel $(*)$ werden dadurch die Äquivalenzklassen genauso geordnet wie die zugehörigen Gerüstelemente. Die Ordnung ist daher auch wohldefiniert.
Insbesondere ist $(C^{I_{ts}I_s}, C^{I_{ts}})$ der größte Begriff von $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_s)$, dessen zugehörige Äquivalenzklasse kleiner ist als die von (C, C^{I_t}).
Mit dieser Vorüberlegung kann nun das Diagramm erstellt werden. Benutzt werden dabei nur die Begriffe der Verbände $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_t)$ $(t \in T)$ bzw. deren Äquivalenzklassen bezüglich θ. Die eigentlichen Elemente von $\mathfrak{S}(\mathbb{K})$ können aber aus dem fertigen Diagramm abgelesen werden.

<u>Schritt 1:</u> Zuerst werden die Begriffsverbände $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_t)$ für alle $t \in T$ berechnet. Deren Liniendiagramme werden gezeichnet und dabei jeweils das kleinste Element weggelassen. Es wird wie üblich die reduzierte Beschriftung (vgl. [5], S. 23) benutzt.

<u>Schritt 2:</u> Mit Hilfe der Bindungen I_{st} $(s,t \in T)$ wird die Vergleichbarkeit von Elementen verschiedener Komponenten bestimmt. Sind $(A,B) \in \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_s)$ und $(C,D) \in \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_t)$ und gilt $C^{I_{ts}} = B$ und $A^{I_{st}} = D$, so ist $(A^{II}, A^I) = (C^{II}, C^I)$. Die Punkte von (A,B) und (C,D) werden daher mit einem beide umfassenden Kreis umschlossen. Dies entspricht der Äquivalenzklassenbildung durch θ. Gilt nur eine der zwei Beziehungen, z. B. $C^{I_{ts}} = B$, so ist (A,B) der größte Begriff von $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_s) \setminus \{(M_s^{I_s}, M_s)\}$, dessen Äquivalenzklasse kleiner ist als die von (C,D). Der Punkt von (A,B) wird dann unterhalb von (C,D) gezeichnet und die Begriffe werden mit einer gestrichelten Linie verbunden. Dabei muss die Struktur des Liniendiagramms von $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_s) \setminus \{(M_s^{I_s}, M_s)\}$ erhalten bleiben. Der Übersichtlichkeit wegen wird eine gestrichelte Linie zwischen zwei Punkten wieder gelöscht, wenn es im Diagramm zwischen den Punkten einen anderen aufsteigenden Pfad aus Linien gibt. Dieses Löschen entspricht der transitiven Reduktion, die auch zum Zeichnen von Liniendiagrammen gehört.

<u>Schritt 3:</u> Da die Kontexte $\mathbb{K}_t$ nicht unbedingt disjunkte Gegenstands- und Merkmalsmengen haben müssen, können Beschriftungen doppelt auftreten. Nach Folgerung 63 sind alle Gegenstandsbegriffe von $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ in $\mathfrak{S}(\mathbb{K})$ enthalten. Zu $g \in G$ gibt es folglich im Diagramm ein kleinstes Element, das mit g beschriftet ist. An allen anderen Punkten kann das g gelöscht werden. Diese Überlegung trifft allerdings nicht analog auf Merkmale zu. Deren Beschriftung kann nicht einfach durch Streichen gewonnen werden. Will man auch die Merkmale kennzeichnen, so muss jedes Element des Gerüstes untersucht werden. Ein Element $(A,B) \in \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_s)$

wird mit m gekennzeichnet, wenn es eine Bindung I_{st} mit $t \in T$ gibt, so dass $m \in A^{I_{st}}$ gilt. Von der Menge aller mit m beschrifteten Elemente bestimmt man nun die maximalen Elemente und löscht m bei allen anderen.
Die Kennzeichnung der Merkmale ist der einzige Schritt, bei dem der gesamte Kontext verwendet werden muss. Zeichnet man die Merkmale nicht ins Gerüstdiagramm ein, so kann dennoch der Verband der Umfänge von $\mathbb{K}$ abgelesen werden, der ja isomorph zu $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ ist.

Lesart: Das erhaltene Diagramm entspricht (mit allen Linien) dem Liniendiagramm der geordneten Menge $\mathfrak{S}(\mathbb{K})$. Der Begriff, der zu einem bestimmten Punkt im Diagramm gehört, lässt sich genauso ablesen wie im Liniendiagramm eines Begriffsverbandes. Alle Gegenstände, mit denen ein Punkt unterhalb des Begriffes beschriftet ist, bilden den Umfang, alle Merkmale, mit denen ein Punkt oberhalb des Begriffes beschriftet ist, bilden den Inhalt. Anders als in Liniendiagrammen kann man jedoch nicht alle Suprema und Infima ablesen. Nur innerhalb einer Komponente können mit Hilfe der durchgezogenen Linien Suprema bestimmt werden.

Die Abb. 5.2 zeigt einen Kontext, drei Teilkontexte mit der Überdeckungseigenschaft, die drei zugehörigen Begriffsverbände – jeweils ohne das kleinste Element – das Gerüst und den gesamten Begriffsverband. Die Elemente des Gerüstes sind im Verbandsdiagramm grau gefärbt. Für die drei Komponenten wurden insgesamt zwölf Begriffe ausgerechnet. Es gibt drei Paare verschiedener Begriffe, die beim Faktorisieren identifiziert werden. Insgesamt hat das Gerüst also neun Elemente. Der zugehörige Begriffsverband hat 19 Elemente. Das angegebene Beispiel in Abb. 5.2 ist ein homomorphes Bild des $FN_5(3)$, dessen Gerüst in [11] auf S. 66 dargestellt ist. Der Verband $FN_5(3)$ hat 99 Elemente, das Gerüst nur 15.
Die Diagramme nach obiger Anleitung entsprechen denen, die in [11] gezeichnet werden. Die Relation θ entspricht hier genau der Relation θ in [11], Abschn. 3. Im Unterschied zur obigen Konstruktion werden in [11] zunächst die Abbildungen α_{st} (also die zu den Bindungen I_{ts} gehörigen sup-Morphismen) durch Pfeile eingezeichnet. In einem weiteren Schritt wird dann jedes Element an einer Pfeilspitze unter das Element am entsprechenden Pfeilanfang gezeichnet. Elemente, die durch Doppelpfeile verbunden sind, werden mit einem Kreis umschlossen.

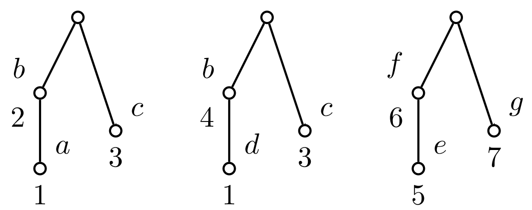
Bemerkung 78 Beim Zeichnen von Gerüsten modularer vollständiger Verbände vereinfacht sich die Konstruktion. Nach Satz 73 sind die Komponenten des Gerüstes disjunkt. Folglich ist die Äquivalenzrelation θ die Gleichheitsrelation und es brauchen keine Begriffe mit Kreisen umschlossen zu werden.

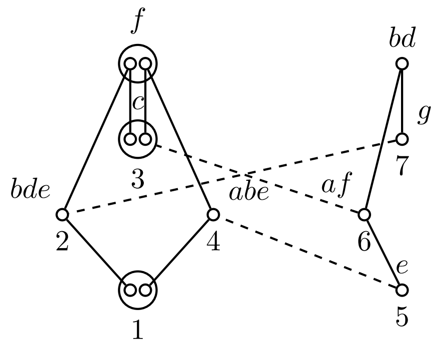
	a	b	c	d	e	f	g
1	$\times$	$\times$	$\swarrow\!\!\!\!\nearrow$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
2	$\swarrow\!\!\!\!\nearrow$	$\times$	$\nearrow$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
3	$\swarrow$	$\swarrow\!\!\!\!\nearrow$	$\times$	$\swarrow$		$\times$	
4	$\times$	$\times$	$\nearrow$	$\swarrow\!\!\!\!\nearrow$	$\times$	$\times$	
5	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\swarrow\!\!\!\!\nearrow$
6	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\swarrow\!\!\!\!\nearrow$	$\times$	$\nearrow$
7		$\times$		$\times$	$\swarrow$	$\swarrow\!\!\!\!\nearrow$	$\times$

	a	b	c
1	$\times$	$\times$	$\swarrow\!\!\!\!\nearrow$
2	$\swarrow\!\!\!\!\nearrow$	$\times$	$\nearrow$
3	$\swarrow$	$\swarrow\!\!\!\!\nearrow$	$\times$

	b	c	d
1	$\times$	$\swarrow\!\!\!\!\nearrow$	$\times$
3	$\swarrow\!\!\!\!\nearrow$	$\times$	$\swarrow$
4	$\times$	$\nearrow$	$\swarrow\!\!\!\!\nearrow$

	e	f	g
5	$\times$	$\times$	$\swarrow\!\!\!\!\nearrow$
6	$\swarrow\!\!\!\!\nearrow$	$\times$	$\nearrow$
7	$\swarrow$	$\swarrow\!\!\!\!\nearrow$	$\times$





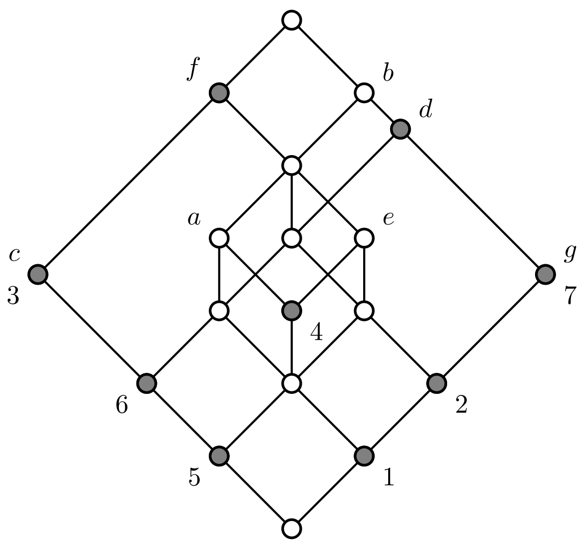


Abb. 5.2: Kontext, Teilkontexte, Gerüstdiagramm und Begriffsverband

6 Die Varietät M_3

In der Verbandstheorie ist der Begriff der *Varietät* von großer Bedeutung (s. z. B. [7], Kap. V). Eine Varietät ist die Klasse aller Verbände, die eine bestimmte Menge von Identitäten Σ erfüllen, d. h. aller Verbände, die Modelle von Σ sind. Gleichzeitig sind Varietäten genau die Klassen von Verbänden, die gegen die Konstruktion von Produkten, Unterverbänden und homomorphen Bildern abgeschlossen sind. Der Durchschnitt von Varietäten ist wieder eine Varietät und folglich gibt es eine kleinste Varietät, die eine gegebene Klasse $\mathbf{K}$ von Verbänden enthält. Diese wird mit $\mathrm{Var}(\mathbf{K})$ bezeichnet und kann konstruiert werden nach der Formel (vgl. [7], Kap. V.1, Corollary 4)

$$\mathrm{Var}(\mathbf{K}) = \mathbf{HSP}(\mathbf{K}).$$

Dabei ist $\mathbf{P}(\mathbf{K})$ die Klasse aller Produkte mit Faktoren aus $\mathbf{K}$, $\mathbf{S}(\mathbf{K})$ die Klasse aller Unterverbände von Verbänden aus $\mathbf{K}$ und $\mathbf{H}(\mathbf{K})$ die Klasse aller homomorphen Bilder von Verbänden aus $\mathbf{K}$.

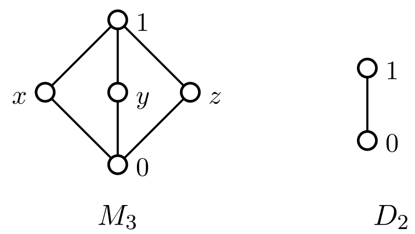


Abb. 6.1: Die Verbände M_3 und D_2

Es sei M_3 ein fünfelementiger modularer Verband, der nicht distributiv ist, und D_2 ein zweielementiger Verband (s. Abb. 6.1). In diesem Kapitel geht es um die Varietät $\mathbf{M}_3 := \mathrm{Var}(M_3)$, die kleinste modulare, nicht-distributive Varietät. Unter $\mathbf{M}_3$ liegen nur $\mathbf{D} = \mathrm{Var}(D_2)$, die Varietät aller distributiven Verbände, und $\mathbf{T}$, die Varietät, die gerade alle einelementigen Verbände enthält (vgl. [7], S. 308). Im ersten Abschnitt dieses Kapitels geht es um die Gerüste der doppelt fundierten vollständigen Verbände in $\mathbf{M}_3$. Im zweiten Abschnitt werden die doppelt fundierten vollständigen Verbände in $\mathbf{M}_3$ mit Hilfe der Pfeilrelationen in den zugehörigen bereinigten Kontexten charakterisiert.
Dafür werden noch einige Ergebnisse aus der Universellen Algebra bzw. der Verbandstheorie benötigt. Zuerst wird ein bekanntes Resultat von Bjarni Jónsson (s. [9], Corollary 3.4) als Satz 79 zitiert. Dabei bezeichnet $\mathbf{P}_S(\mathbf{K})$ die Klasse aller subdirekten Produkte von Algebren einer Klasse $\mathbf{K}$.

Satz 79 *Es sei* $\mathbf{K}$ *eine endliche Menge endlicher Algebren und für jede Algebra* $A \in \mathrm{Var}(\mathbf{K})$ *sei der Kongruenzrelationenverband* $\mathrm{Con}(A)$ *distributiv. Dann gilt:*

$$\mathrm{Var}(\mathbf{K}) = \mathbf{P}_S\mathbf{HS}(\mathbf{K}).$$

Der Kongruenzrelationenverband jedes beliebigen Verbandes ist distributiv (vgl. [7], Kap. II.3, Theorem 11). Nach Folgerung 79 ist daher jeder Verband in $\mathbf{M}_3$ subdirektes Produkt von Verbänden aus $\mathbf{HS}(M_3)$. Laut Satz von Birkhoff ist jeder Verband subdirektes Produkt subdirekt irreduzibler Verbände (vgl. [1], Kap. VIII.8, Theorem 15) und folglich genügt es, sich auf subdirekt irreduzible Faktoren aus $\mathbf{HS}(M_3)$ zu beschränken. Diese sind isomorph zu D_2, zu M_3 oder einelementig. Letztere sind jedoch für die Konstruktion subdirekter Produkte uninteressant. Zusammenfassend hat man:

Satz 80 *Jeder Verband $A \in \mathbf{M}_3$ ist subdirektes Produkt von Faktoren isomorph zu D_2 oder zu M_3.*

6.1 Gerüste in M_3

In [4], Theorem 9 werden die Gerüste von endlichen subdirekten Produkten, deren Faktoren isomorph zu D_2 oder M_3 sind, charakterisiert. Dabei wird eine Liste von Diagrammen angegeben, die diese Gerüste beschreiben. Jedes Diagramm besteht aus zwei Komponenten eines solchen Gerüstes (vgl. Abschn. 5.6). Diese Idee wird im Folgenden genutzt, um die reduzierten Kontexte von vollständigen Verbänden in $\mathbf{M}_3$ zu beschreiben. Um Satz 80 nutzen zu können, werden nur Begriffsverbände endlicher Länge betrachtet. Die vollständig subdirekten Zerlegungen sind genau die subdirekten Zerlegungen und die Faktoren sind subdirekt irreduzibel genau dann, wenn sie vollständig subdirekt irreduzibel sind.

M_3	a	b	c
1	×		
2		×	
3			×

D_2	d
4	

Abb. 6.2: Kontexte zu M_3 und D_2

Die nächsten zwei Resultate liefern nützliche Regeln zum Konstruieren von Kontexten vollständig subdirekter Produkte bzw. zum schnellen Testen der Bedingungen von Satz 77. Sind die Voraussetzungen wie in Hilfssatz 81, so lassen sich stets weitere 1-erzeugte pfeilabgeschlossene Teilkontexte finden, so dass diese zusammen mit $\mathbb{K}_s$ und $\mathbb{K}_t$ eine vollständig subdirekte Zerlegung bilden (vgl. [5], Hilfssatz 61). Folglich ist Satz 77 anwendbar und daher ist $I_{st} := I \cap (G_s \times M_t)$ eine Bindung von $\mathbb{K}_s$ zu $\mathbb{K}_t$ und $I_{ts} := I \cap (G_t \times M_s)$ eine Bindung von $\mathbb{K}_t$ zu $\mathbb{K}_s$. Außerdem gelten $I_{st} \circ I_{ts} \supseteq I_s$ und $I_{ts} \circ I_{st} \supseteq I_t$.

Hilfssatz 81 *Es seien $\mathbb{K}$ ein reduzierter Kontext eines doppelt fundierten, modularen vollständigen Verbandes und $\mathbb{K}_s$ und $\mathbb{K}_t$ zwei voneinander verschiedene 1-erzeugte Teilkontexte von $\mathbb{K}$. Sind nun $(A,B) \in \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_s) \setminus \{(\emptyset^{I_sI_s}, \emptyset^{I_s})\}$ und $(C,D) \in \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_t) \setminus \{(\emptyset^{I_tI_t}, \emptyset^{I_t})\}$, so gilt:*

$$C^{I_{ts}} \subseteq B \Longrightarrow A^{I_{st}} \not\subseteq D.$$

Insbesondere gilt für $g_s \in G_s$ und $g_t \in G_t$:

$$g_t^{I_{ts}} \subseteq g_s^{I_s} \Longrightarrow g_s^{I_{st}} \not\subseteq g_t^{I_t}.$$

Beweis: Die beiden Teilkontexte können für die Bildung von Gerüstkomponenten herangezogen werden. Nach Satz 73 sind dann die zugehörigen Komponenten von $\mathfrak{S}(\mathbb{K})$ disjunkt.

Folglich gilt $(C^{II}, C^I) \neq (A^{II}, A^I)$. Nach Regel $(*)$ in Abschn. 5.6 können also nicht $C^{I_{ts}} \subseteq B$ und $A^{I_{st}} \subseteq D$ gleichzeitig gelten. Die zweite Aussage folgt aus der ersten mit $(A, B) = \gamma_s g_s$ und $(C, D) = \gamma_t g_t$. Man hat dann $g_t^{I_t I_t I_{ts}} \subseteq g_s^{I_s} \Longrightarrow g_s^{I_s I_s I_{st}} \not\subseteq g_t^{I_t}$. Nach Hilfssatz 32 ist $g_t^{I_t I_t I_{ts}} = g_t^{I_{ts}}$ und $g_s^{I_s I_s I_{st}} = g_s^{I_{st}}$. Damit folgt die Behauptung. ■

Hilfssatz 82 *Es seien $\mathbb{K}$ ein reduzierter Kontext eines doppelt fundierten, modularen vollständigen Verbandes und $\mathbb{K}_s$ und $\mathbb{K}_t$ zwei voneinander verschiedene 1-erzeugte Teilkontexte von $\mathbb{K}$. Für $m_s \in M_s$ und $m_t \in M_t$ gilt:*

$$m_t^{I_{st}} \subseteq m_s^{I_s} \Longrightarrow m_s^{I_{ts}} \not\subseteq m_t^{I_t}.$$

Beweis: (indirekt) Annahme: Es gelten $m_t^{I_{st}} \subseteq m_s^{I_s}$ und $m_s^{I_{ts}} \subseteq m_t^{I_t}$. Dann hat man:

$$m_s^{I_{ts}} \subseteq m_t^{I_t} \Longrightarrow m_s^{I_{ts} I_t} \supseteq m_t^{I_t I_t} \Longrightarrow m_s^{I_{ts} I_t} \supseteq \{m_t\} \Longrightarrow m_s^{I_{ts} I_t I_{st}} \subseteq m_t^{I_{st}} \Longrightarrow m_s^{I_{st} \circ I_{ts}} \subseteq m_t^{I_{st}}.$$

Nach der Annahme gilt $m_s^{I_{st} \circ I_{ts}} \subseteq m_t^{I_{st}} \subseteq m_s^{I_s}$. Nach Satz 77 ist aber auch $I_{st} \circ I_{ts} \supseteq I_s$ und daher $m_s^{I_{st} \circ I_{ts}} \supseteq m_s^{I_s}$. Insgesamt folgt $m_t^{I_{st}} = m_s^{I_s}$. Analog hat man $m_s^{I_{ts}} = m_t^{I_t}$.
In $\mathbb{L} := (G_s \cup G_t, M_s \cup M_t, I_{\mathbb{L}})$ mit $I_{\mathbb{L}} := I \cap (G_s \cup G_t \times M_s \cup M_t)$ gilt demnach $m_s^{I_{\mathbb{L}}} = m_t^{I_{\mathbb{L}}}$. $\mathbb{L}$ ist aber eine Vereinigung von pfeilabgeschlossenen Teilkontexten von $\mathbb{K}$, also selbst auch pfeilabgeschlossen und damit verträglich. Nach Hilfssatz 9 ist $\mathbb{L}$ dann auch reduziert und es folgt $m_s = m_t$. Da $\mathbb{K}_t$ und $\mathbb{K}_s$ disjunkt sind (nach Satz 73), steht die Annahme damit im Widerspruch zur Voraussetzung des Satzes. ■

Betrachtet werden nun Teilkontexte von $\mathbb{K}$ der Form $(G_s \cup G_t, M_s \cup M_t, I \cap (G_s \cup G_t \times M_s \cup M_t))$, also immer die Teilkontexte $\mathbb{K}_s$ und $\mathbb{K}_t$ zusammen mit den Bindungen I_{st} und I_{ts} (vgl. Satz 77). Damit ist folgende Aussage möglich:

Satz 83 *Ist $\mathbb{K}$ ein reduzierter Kontext eines vollständigen Verbandes endlicher Länge der Varietät $\mathbf{M}_3$ und sind $\mathbb{K}_s$ und $\mathbb{K}_t$ zwei verschiedene 1-erzeugte Teilkontexte von $\mathbb{K}$, dann ist der Teilkontext $\mathbb{L} := (G_s \cup G_t, M_s \cup M_t, I \cap (G_s \cup G_t \times M_s \cup M_t))$ durch einen der 16 Kontexte auf S. 43 gegeben (bis auf Umbenennung der Elemente und Vertauschung von s und t).*

Beweis: Die Begriffsverbände $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_s)$ und $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_t)$ sind subdirekt irreduzibel und daher nach Satz 80 isomorph zu M_3 oder D_2. Nach Hilfssatz 9 sind $\mathbb{K}_s$ und $\mathbb{K}_t$ reduziert und entsprechen daher einem der beiden Kontexte in Abb. 6.2. Der Begriffsverband $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ ist modular und folglich sind die Teilkontexte $\mathbb{K}_s$ und $\mathbb{K}_t$ paarweise disjunkt.
Geprüft werden die Bedingungen von Satz 77. Wählt man alle weiteren 1-erzeugten Teilkontexte von $\mathbb{K}$ aus, so haben diese zusammen mit $\mathbb{K}_s$ und $\mathbb{K}_t$ die Überdeckungseigenschaft. Es bleiben also die Bedingungen mit den Bindungsprodukten. Wegen Hilfssatz 32 sind einzigen nichttrivialen Bedingungen darunter $I_s \subseteq I_{st} \circ I_{ts}$ und $I_t \subseteq I_{ts} \circ I_{st}$. Für jede Wahl von $\mathbb{L}$ aus obiger Liste sind diese Bedingungen erfüllt ($\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{L})$ ist also stets in $\mathbf{M}_3$). Folglich enthält diese Liste kein überflüssiges Element.
Es werden nun alle anderen Möglichkeiten, Bindungen I_{st} und I_{ts} zu wählen, ausgeschlossen. Dabei werden die Bezeichnung der Elemente und die Inzidenzrelationen der Kontexte $\mathbb{K}_s$ und $\mathbb{K}_t$ o.B.d.A. als die der zu den Fällen gehörigen Abbildungen angenommen.
<u>Fall 1:</u> $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_s) \cong \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_t) \cong D_2$. Der einzige ausgeschlossene Fall ist $I_{st} = I_{ts} = \emptyset$. In diesem wäre aber $\mathbb{L}$ nicht reduziert und es folgt sofort $\mathbb{K}_s = \mathbb{K}_t$ im Widerspruch zur Voraussetzung.
<u>Fall 2:</u> $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_s) \cong M_3$ und $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_t) \cong D_2$. Für die Bindung I_{st} gibt es drei verschiedene Möglichkeiten (bis auf Umbenennung der Elemente).

$\mathbb{L}_1$		M_s	M_t
		a	b
G_s	1		×
G_t	2	×	

$\mathbb{L}_2$		M_s	M_t
		a	b
G_s	1		
G_t	2	×	

$\mathbb{L}_3$		M_s			M_t
		a	b	c	d
G_s	1	×			×
	2		×		×
	3			×	×
G_t	4	×	×	×	

$\mathbb{L}_4$		M_s			M_t
		a	b	c	d
G_s	1	×			×
	2		×		×
	3			×	×
G_t	4	×			

$\mathbb{L}_5$		M_s			M_t
		a	b	c	d
G_s	1	×			×
	2		×		×
	3			×	×
G_t	4				

$\mathbb{L}_6$		M_s			M_t
		a	b	c	d
G_s	1	×			
	2		×		
	3			×	
G_t	4	×	×	×	

$\mathbb{L}_7$		M_s			M_t
		a	b	c	d
G_s	1	×			×
	2		×		
	3			×	
G_t	4	×	×	×	

$\mathbb{L}_8$		M_s			M_t		
		a	b	c	d	e	f
G_s	1	×			×	×	×
	2		×		×	×	×
	3			×	×	×	×
G_t	4	×	×	×	×		
	5	×	×	×		×	
	6	×	×	×			×

$\mathbb{L}_9$		M_s			M_t		
		a	b	c	d	e	f
G_s	1	×			×		
	2		×		×		
	3			×	×		
G_t	4	×	×	×	×		
	5	×	×	×		×	
	6	×	×	×			×

$\mathbb{L}_{10}$		M_s			M_t		
		a	b	c	d	e	f
G_s	1	×					
	2		×				
	3			×			
G_t	4	×	×	×	×		
	5	×	×	×		×	
	6	×	×	×			×

$\mathbb{L}_{11}$		M_s			M_t		
		a	b	c	d	e	f
G_s	1	×			×	×	×
	2		×		×		
	3			×	×		
G_t	4	×	×	×	×		
	5	×	×	×		×	
	6	×	×	×			×

$\mathbb{L}_{12}$		M_s			M_t		
		a	b	c	d	e	f
G_s	1	×			×	×	×
	2		×				
	3			×			
G_t	4	×	×	×	×		
	5	×	×	×		×	
	6	×	×	×			×

$\mathbb{L}_{13}$		M_s			M_t		
		a	b	c	d	e	f
G_s	1	×			×		
	2		×				
	3			×			
G_t	4	×	×	×	×		
	5	×	×	×		×	
	6	×	×	×			×

$\mathbb{L}_{14}$		M_s			M_t		
		a	b	c	d	e	f
G_s	1	×			×		
	2		×			×	
	3			×			
G_t	4	×	×	×	×		
	5	×	×	×		×	
	6	×	×	×			×

$\mathbb{L}_{15}$		M_s			M_t		
		a	b	c	d	e	f
G_s	1	×			×		
	2		×			×	
	3			×			×
G_t	4	×	×	×	×		
	5	×	×	×		×	
	6	×	×	×			×

$\mathbb{L}_{16}$		M_s			M_t		
		a	b	c	d	e	f
G_s	1	×			×	×	×
	2		×		×		
	3			×	×		
G_t	4	×	×	×	×		
	5	×				×	
	6	×					×

Ist $I_{st} = \emptyset$, so gilt für jedes $g \in G_s$ $g^{I_{st}} \subseteq 4^{I_t}$. Nach Hilfssatz 81 ist dann $4^{I_{ts}} \nsubseteq g^{I_s}$ und folglich hat I_{ts} mindestens zwei Elemente. Die einzige Bindung, die das erfüllt, ist $I_{ts} = G_t \times M_s$, also hat man $\mathbb{L}_6$.
Ist $I_{st} = G_s \times M_t$, so kann I_{ts} eine beliebige Bindung sein: $\mathbb{L}_3, \mathbb{L}_4$ und $\mathbb{L}_5$.
Es bleibt der Fall $I_{st} = \{(1, d)\}$. Wegen Hilfssatz 81 gilt dann $4^{I_{ts}} \nsubseteq 2^{I_s}, 3^{I_s}$. Folglich ist $I_{ts} = G_t \times M_s$ (also $\mathbb{L}_7$) oder $I_{ts} = \{(4, a)\}$. Bei letzterer Wahl ist dann aber $2^{I_{st} \circ I_{ts}} = \{a\}$ und $2^{I_s} = \{b\}$ im Widerspruch zu $I_s \subseteq I_{st} \circ I_{ts}$.
<u>Fall 3:</u> $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_t) \cong M_3$ und $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_s) \cong D_2$. Identisch mit Fall 2 durch Vertauschen von s und t.
<u>Fall 4:</u> $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_s) \cong \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_t) \cong M_3$. Es gibt acht mögliche Bindungen für I_{st} bzw. I_{ts} (bis auf Vertauschung von Elementen):

A	d	e	f
1			
2			
3			

B	d	e	f
1	×		
2			
3			

C	d	e	f
1	×	×	×
2			
3			

D	d	e	f
1	×		
2	×		
3	×		

E	d	e	f
1	×	×	×
2	×		
3	×		

F	d	e	f
1	×		
2		×	
3			

G	d	e	f
1	×		
2		×	
3			×

H	d	e	f
1	×	×	×
2	×	×	×
3	×	×	×

Alle acht Varianten mit $I_{st} = H$ sind in der Liste aufgeführt: $\mathbb{L}_8 - \mathbb{L}_{15}$. Da die Situation für s und t symmetrisch ist, braucht Bindung H auch für I_{ts} nicht mehr betrachtet zu werden.
Für $I_{st} = A$ folgt sofort $I_{ts} = H$ nach Hilfssatz 81. Folglich braucht auch A nicht mehr betrachtet zu werden.
Für $I_{st} = E$ folgt $4^{I_{ts}} \nsubseteq 2^{I_s}, 3^{I_s}$ nach Hilfssatz 81. Folglich ist $4^{I_{st}} = \{a\}$ oder $4^{I_{st}} = \{a, b, c\}$. Da $2^{I_{st} \circ I_{ts}} = 4^{I_{ts}}$ gilt, folgt wegen $I_{st} \circ I_{ts} \supseteq I_s$ und $2^{I_s} = \{b\}$ dann $4^{I_{st}} = \{a, b, c\}$. Analog folgert man mit Hilfssatz 82 $a^{I_{ts}} \nsubseteq e^{I_t}, f^{I_t}$ und mit $\{5\} = e^{I_t} \subseteq e^{I_{ts} \circ I_{st}} = a^{I_{ts}}$ auch $a^{I_{ts}} = \{4, 5, 6\}$. Für I_{ts} bleibt daher nur noch Bindung E, was zu $\mathbb{L}_{16}$ führt. Auch E braucht nun nicht weiter betrachtet zu werden.
Für $I_{st} = B$ oder $I_{st} = C$ gilt nach Hilfssatz 82 $a^{I_{ts}} \nsubseteq d^{I_t}, e^{I_t}, f^{I_t}$. Folglich hat $a^{I_{ts}}$ mindestens zwei Elemente. Die einzige Bindung, die für I_{ts} noch möglich ist, ist D. Dann ist jedoch $\{b\} = 2^{I_s} \nsubseteq \{a\} = 2^{I_s t \circ I_{ts}}$ im Widerspruch zu $I_s \subseteq I_{st} \circ I_{ts}$. Es entfallen also B und C für die weitere Betrachtung.
Für $I_{st} = D$ ist wieder nach Hilfssatz 81 $4^{I_{ts}}$ mindestens zweielementig. Keine der verbliebenen Bindungen kommt daher für I_{ts} in Betracht.
Für $I_{st} = F$ oder $I_{st} = G$ gilt wegen $I_s \subseteq I_{st} \circ I_{ts} : \{a\} = 1^{I_s} \subseteq 1^{I_{st} \circ I_{ts}} = 4^{I_{ts}}$. Da für I_{ts} bereits alle Bindungen außer F und G ausgeschlossen sind, folgt $4^{I_{ts}} = \{a\}$ im Widerspruch zu Hilfssatz 81, denn man hat $1^{I_{st}} \subseteq 4^{I_t}$ und $4^{I_{ts}} \subseteq 1^{I_s}$.
Damit wurden alle Kombinationen von Bindungen, die nicht in der Liste stehen, ausgeschlossen. ■

Mit Hilfe dieser Liste kann die Konstruktion von Kontexten zu vollständigen Verbänden in $\mathbf{M}_3$ vereinfacht werden. Es ist allerdings nicht möglich, Teilkontexte der Liste ohne weitere Prüfung beliebig zu kombinieren, da in Satz 83 keine Aussage über das Bindungsprodukt $I_{rs} \circ I_{st}$ für paarweise verschiedene r, s, t gemacht wird.

6.2 Pfeilrelationen in M_3

In diesem Abschnitt wird ein anderer Zugang genutzt, um die bereinigten Kontexte von Verbänden aus $\mathbf{M}_3$ zu beschreiben. Das Kriterium für die Zugehörigkeit eines Begriffsverbandes zu $\mathbf{M}_3$ wird die Anzahl von Pfeilen pro Zeile und Spalte im Kontext sein. Dazu werden

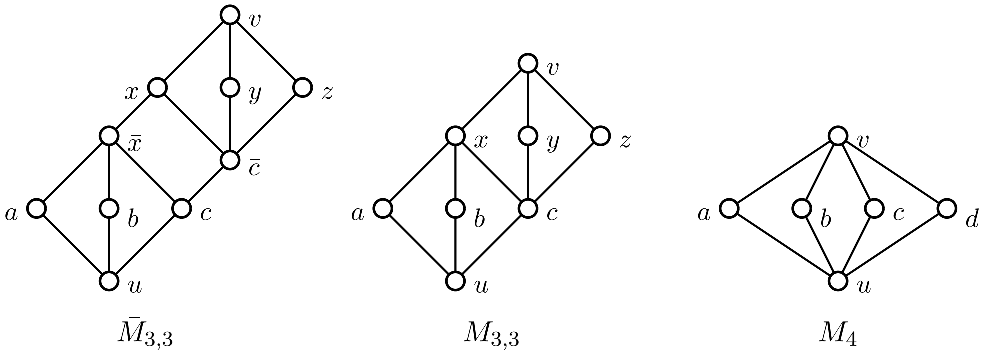


Abb. 6.3: Diagramme einiger Verbände

einige weitere Sätze aus der Verbandstheorie benötigt. Abb. 6.3 zeigt die Verbände, die dabei eine Rolle spielen.
Satz 84 ist ein Resultat von Bjarni Jónsson ([10], Theorem 1) und charakterisiert eine Klasse von Varietäten modularer Verbände, zu der auch $\mathbf{M}_3$ gehört. Folgerung 85 entspricht [10], Corollary 9.

Satz 84 *Für jede Varietät* $\mathbf{V}$ *modularer Verbände sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

1. $M_{3,3} \notin \mathbf{V}$.
2. *Jedes Element von* $\mathbf{V}$ *ist subdirektes Produkt von Verbänden der Länge zwei oder weniger.*
3. *Die Ungleichung* $a \wedge (b \vee (c \wedge d) \wedge (c \vee d)) \leq b \vee (a \wedge c) \vee (a \wedge d)$ *gilt in* $\mathbf{V}$.

Folgerung 85 *Im Verband der Varietäten modularer Verbände hat* $\mathbf{M}_3$ *genau zwei obere Nachbarn,* $\mathbf{M}_4 := \mathrm{Var}(M_4)$ *und* $\mathbf{M}_{3,3} := \mathrm{Var}(M_{3,3})$*. Jede Varietät, die* $\mathbf{M}_3$ *echt enthält, enthält dann auch* $\mathbf{M}_4$ *oder* $\mathbf{M}_{3,3}$.

Satz 86 *Es sei* $\mathbb{K}$ *ein bereinigter Kontext eines vollständigen Verbandes* V *aus der Varietät* $\mathbf{M}_3$*. Dann gibt es zu jedem Gegenstand* $g \in G$ *höchstens zwei verschiedene Merkmale* $m, n \in M$*, so dass* $g \swarrow\!\!\nearrow m$ *und* $g \swarrow\!\!\nearrow n$ *gilt. Ebenso gibt es zu jedem Merkmal* $m \in M$ *höchstens zwei verschiedene Gegenstände* $g, h \in G$*, so dass* $g \swarrow\!\!\nearrow m$ *und* $h \swarrow\!\!\nearrow m$ *gilt.*

Beweis: (indirekt) Annahme: V erfüllt alle genannten Voraussetzungen und es gibt drei voneinander verschiedene Merkmale $m, n, p \in M$ mit $g \swarrow\!\!\nearrow m$, $g \swarrow\!\!\nearrow n$ und $g \swarrow\!\!\nearrow p$.
Wegen der angenommenen Pfeilrelationen sind m, n, p und g in $\mathbb{K}$ irreduzibel (vgl. [5], Hilfssatz 13). Die Menge $E := \{\mu m, \mu n, \mu p, \gamma g\}$ erzeugt in V einen Unterverband U. Dieser liegt dann auch in $\mathbf{M}_3$ und nach Satz 80 existieren Verbände V_t mit $V_t \cong M_3$ oder $V_t \cong D_2$ $(t \in T)$, so dass U subdirektes Produkt der V_t ist. Der Einfachheit wegen wird vorausgesetzt, dass jeder der Faktoren genau einem der beiden Diagramme aus Abb. 6.1 mit der entsprechenden Beschriftung entspricht, also $V_t = M_3$ oder $V_t = D_2$ für $t \in T$ gilt. Zu einem Faktor V_t bezeichne $\pi_t : U \to V_t,\ u \mapsto \pi_t u =: u_t$ den Projektionshomomorphismus. Jedem Element $u \in U$ ist dadurch eindeutig ein Tupel $(u_t)_{t \in T}$ zugeordnet. Außerdem kann vorausgesetzt werden, dass kein Faktor im subdirekten Produkt redundant ist, d. h., für $s, t \in T$ existiert

kein Verbandsisomorphismus $\varphi : V_s \to V_t$ mit $\varphi\pi_s e = \pi_t e$ für alle $e \in E$. Insbesondere ist T damit endlich, da es nur endlich viele verschiedene Möglichkeiten gibt, den vier Erzeugern aus E je ein Element von M_3 bzw. D_2 zuzuordnen. Diese Menge solcher Zuordnungen wird im Weiteren betrachtet und eingegrenzt:
Zum einen muss gewährleistet sein, dass für $t \in T$ die Projektion $\pi_t : U \to V_t$ surjektiv ist. Dazu muss $\{(\mu m)_t, (\mu n)_t, (\mu p)_t, (\gamma g)_t\}$ ein Erzeugendensystem von V_t sein. Für $V_t = M_3$ bedeutet das $\pi_t[E] \supseteq \{x, y, z\}$, für $V_t = D_2$ heißt das $\pi_t[E] = \{0, 1\}$.
Zum anderen folgt aus $g \swarrow\!\!\nearrow m$ nach Hilfssatz 15: $(\gamma g)_* = \mu m \wedge \gamma g$. Analoges gilt für n und p und mit der Projektion π_t erhält man die Gleichung:

$$((\gamma g)_*)_t = (\mu m)_t \wedge (\gamma g)_t = (\mu n)_t \wedge (\gamma g)_t = (\mu n)_t \wedge (\gamma g)_t. \tag{6.1}$$

Für $V_t = M_3$ folgt daraus $1 \notin \pi_t[E]$. Man hätte sonst $\pi_t[E] = \{x, y, z, 1\}$, womit sich die Gleichung nicht erfüllen lässt. Für $V_t = D_2$ folgt $(\mu m)_t = (\mu n)_t = (\mu p)_t = 0$ aus $(\gamma g)_t = 1$. Tab. 6.1 zeigt alle möglichen Kombinationen, den Erzeugern aus E Projektionsbilder in M_3 oder D_2 zuzuordnen, so dass beide Zulässigkeitsbedingungen erfüllt sind - bis auf Vertauschung der Elemente x, y und z, was aber zu redundanten Faktoren führt.

t	V_t	$(\mu m)_t$	$(\mu n)_t$	$(\mu p)_t$	$(\gamma g)_t$
1		x	x	y	z
2		x	y	x	z
3		y	x	x	z
4	M_3	0	x	y	z
5		x	0	y	z
6		x	y	0	z
7		x	y	z	0
8		1	1	1	0
9		1	1	0	0
10		1	0	1	0
11	D_2	1	0	0	0
12		0	1	1	0
13		0	1	0	0
14		0	0	1	0
15		0	0	0	1

Tab. 6.1: Die möglichen Faktoren von U

Die Indexmenge T kann demnach als Teilmenge von $\{1, \dots, 15\}$ gewählt werden. Das kleinste Element von U ist $(0)_{t\in T} = \mu m \wedge \mu n \wedge \mu p \wedge \gamma g = (\gamma g)_*$. Da $\gamma g > (\gamma g)_*$ ist, gibt es ein $t \in T$ mit $(\gamma g)_t \neq 0$. Also muss T mindestens einen der Indizes 1 bis 6 oder 15 enthalten.
Es seien $a, b \in \{m, n, p\}$. Dann folgt aus $g \swarrow\!\!\nearrow a$ nach Hilfssatz 15 $\mu a \neq (\mu a)^* = \mu a \vee \gamma g \in U$. Daher ist $(\mu a)^*$ auch in U der einzige obere Nachbar von μa. Da $\mu a \vee \mu b \geq \mu a$ gilt, hat man

$$\forall a, b \in \{m, n, p\} : \mu a \vee \mu b = \mu a \quad \text{oder} \quad \mu a \vee \mu b \geq \mu a \vee \gamma g. \tag{6.2}$$

Für zwei voneinander verschiedene Merkmale $a, b \in \{m, n, p\}$ mit

$$(\mu a)_t \vee (\gamma g)_t > (\mu a)_t \vee (\mu b)_t < (\mu b)_t \vee (\gamma g)_t \tag{6.3}$$

folgt $\mu a = \mu a \vee \mu b = \mu b$. Da $\mathbb{K}$ bereinigt ist, steht dies im Widerspruch zur Voraussetzung. Für $(\mu a)_t = (\mu b)_t \neq (\gamma g)_t$ und $(\gamma g)_t \neq 0$ erhält man stets 6.3. Folglich entfallen die Indizes 1, 2, 3 und 15. Für $t \in \{4, 5, 6\}$ gibt es stets ein Merkmal a mit $(\mu a)_t = 0$. Für jedes andere Merkmal b sind dann $\gamma g \vee \mu a$ und $\mu b \vee \mu a$ unvergleichbar. Dies steht im Widerspruch zu 6.2. Es bleibt kein Index t übrig, für den $(\gamma g)_t \neq 0$ gilt. Damit ist die Annahme widerlegt. Dual zeigt man die Aussage über Doppelpfeile bei Merkmalen. ■

Für die Umkehrung des Satzes wird die Theorie projektiver Verbände und projektiver Cover benutzt. Die Definitionen dafür werden aus [2], Abschn. 2 übernommen. Satz 90 ist ein Spezialfall von [2], Theorem 5.1.

Definition 87 Es sei $\mathbf{K}$ eine Varietät von Verbänden und $V \in \mathbf{K}$. V heißt *projektiv* in $\mathbf{K}$, falls für beliebige Verbände $W_1, W_2 \in \mathbf{K}$ und jeden surjektiven Homomorphismus $\varphi : W_1 \to W_2$ und jeden Homomorphismus $\psi : V \to W_2$ ein Homomorphismus $\tilde{\psi} : V \to W_1$ existiert, so dass $\varphi \circ \tilde{\psi} = \psi$ gilt.

Hilfssatz 88 *Ist* $\mathbf{K}$ *eine Varietät von Verbänden und ist* $V \in \mathbf{K}$ *projektiv in* $\mathbf{K}$, *so gibt es zu jedem surjektiven Homomorphismus* $\varphi : W \to V$ *mit* $W \in \mathbf{K}$ *einen Unterverband* S *von* W *mit* $S \cong V$ *und* $\varphi[S] = V$.

Beweis: Es sei $\psi : V \to V$ der identische Homomorphismus. Da V projektiv in $\mathbf{K}$ ist, existiert ein Homomorphismus $\tilde{\psi} : V \to W$ mit $\varphi \circ \tilde{\psi} = \psi$. Setzt man $S := \tilde{\psi}[V]$, so ist S ein Unterverband von W und es ist $V = \psi[V] = \varphi[\tilde{\psi}[V]] = \varphi[S]$. Da $\varphi \circ \tilde{\psi}$ außerdem die Identität auf V ergibt, ist $\tilde{\psi}$ injektiv und damit ein Isomorphismus zwischen S und $\varphi[S]$. ■

Definition 89 Es sei $\mathbf{K}$ eine Varietät von Verbänden, $V, W \in \mathbf{K}$ und $\omega : V \to W$ ein surjektiver Homomorphismus. (V, ω) heißt *Cover* von W in $\mathbf{K}$, falls für jeden Verband $U \in \mathbf{K}$ und jeden Homomorphismus $\tau : U \to V$ gilt: Ist $\omega \circ \tau$ surjektiv, so ist auch τ surjektiv.
(V, ω) heißt *projektives Cover* von W, falls V zusätzlich projektiv in $\mathbf{K}$ ist.

Satz 90 *Es sei* $\omega : \bar{M}_{3,3} \to M_{3,3}$ *der eindeutig bestimmte, surjektive Homomorphismus. In der Varietät aller Verbände ist* $(\bar{M}_{3,3}, \omega)$ *ein projektives Cover von* $M_{3,3}$.

Mit der Bezeichnung aus Abb. 6.3 ist der Homomorphismus aus Satz 90 gegeben durch

$$\omega : \bar{M}_{3,3} \to M_{3,3} : v \to \begin{cases} x & \text{für } v = \bar{x} \\ y & \text{für } v = \bar{y} \\ v & \text{sonst.} \end{cases}$$

Folgerung 91 *Ist* M *ein Verband und* $\varphi : M \to M_{3,3}$ *ein surjektiver Homomorphimus, dann existiert ein Unterverband* S *von* M *mit* $\varphi[M] = M_{3,3}$ *und* $S \cong M_{3,3}$ *oder* $S \cong \bar{M}_{3,3}$.

Beweis: Da $\varphi : V \to M_{3,3}$ surjektiv ist und $\bar{M}_{3,3}$ projektiv, existiert ein Homomorphismus $\bar{\omega} : \bar{M}_{3,3} \to M$ mit $\varphi \circ \bar{\omega} = \omega$. Es sei $S := \bar{\omega}[\bar{M}_{3,3}]$. Dann ist S ein Unterverband von M und es ist $\varphi[S] = \varphi \circ \bar{\omega}[\bar{M}_{3,3}] = \omega[\bar{M}_{3,3}] = M_{3,3}$. $\bar{M}_{3,3}$ hat bis auf Isomorphie nur vier Faktorverbände: $\bar{M}_{3,3}$, $M_{3,3}$, D_2 und den einelementigen Verband. S ist also isomorph zu einem dieser vier Verbände und, da $\varphi[S] = M_{3,3}$ gilt, bleibt für S nur $S \cong \bar{M}_{3,3}$ oder $S \cong M_{3,3}$. ■

Schließlich wird mit dem folgenden Hilfssatz noch [4], Lemma 4 zitiert.

Hilfssatz 92 *Es sei $\mathfrak{M}^2$ die Varietät, die von allen modularen Verbänden der Länge zwei erzeugt wird. Dann ist M_4 projektiv in $\mathfrak{M}^2$, d. h., für jeden surjektiven Homomorphismus $\varphi : M \to M_4$ mit $M \in \mathfrak{M}^2$ existiert ein Unterverband S von M mit $S \cong M_4$ und $\varphi[S] = M_4$.*

Satz 93 *Es sei $\mathbb{K}$ ein bereinigter Kontext eines modularen, doppelt fundierten vollständigen Verbandes V. Gilt für jeden Gegenstand $g \in G$ $|\{m \in M \mid g \swarrow\!\!\!\!\nearrow m\}| \leq 2$ oder für jedes Merkmal $m \in M$ $|\{g \in G \mid g \swarrow\!\!\!\!\nearrow m\}| \leq 2$, dann ist V ein Element der Varietät $\mathbf{M}_3$.*

Beweis: Gezeigt wird die Aussage für den Fall $|\{m \in M \mid g \swarrow\!\!\!\!\nearrow m\}| \leq 2$ für alle $g \in G$. Wegen Folgerung 85 und weil $\mathbf{M}_3$ die kleinste modulare Varietät ist, gilt $\mathrm{Var}(V) \supseteq \mathrm{Var}(M_{3,3})$, $\mathrm{Var}(V) \supseteq \mathrm{Var}(M_4)$ oder $V \in \mathbf{M}_3$. Die beiden Inklusionen werden im Folgenden widerlegt.
Annahme: $\mathrm{Var}(V) \supseteq \mathrm{Var}(M_{3,3})$. D. h. $M_{3,3} \in \mathbf{HSP}(V)$. Nach Hilfssatz 91 hat man daher $\bar{M}_{3,3} \in \mathbf{SP}(V)$ oder $M_{3,3} \in \mathbf{SP}(V)$. Beide Fälle werden ausgeschlossen:
Es sei zunächst P eine direkte Potenz von V, die einen Unterverband S enthält mit $S \cong \bar{M}_{3,3}$. Die Elemente von S seien wie in Abb. 6.3 bezeichnet. Außerdem sei $\mathbb{K}_P$ der zu P gehörige Summenkontext, wobei jeder Summand $\mathbb{K}$ entspricht. $\mathbb{K}_P$ ist bereinigt.
Nach Satz 3 ist mit V auch P doppelt fundiert. Folglich kann ein Element $s \in P$ minimal gewählt werden bezüglich der Eigenschaften $s \leq a$ und $s \nleq u$. Ist $s = \sup Q$ für $Q \subseteq P$, so existiert ein Element $q \in Q$ mit $q \nleq u$ - sonst wäre $s = \sup Q \leq u$. Dann gilt $q \leq s \leq a$ und aus der Minimalität von s folgt $s = q \in Q$. Folglich ist s sup-irreduzibel in P und damit Gegenstandsbegriff eines irreduziblen Gegenstandes g aus $\mathbb{K}_P$; es gilt $s = \gamma g$.
Die folgende Konstruktion eines Merkmals m_z kann anhand von Abb. 6.4 nachvollzogen werden. Da g irreduzibel ist, hat man $\gamma g > (\gamma g)_* =: s_*$ und somit auch $s_* \leq u$ und damit $s \wedge u = s_*$. Das Intervall $[s_*, s]$ ist demnach zu $[u, s \vee u]$ aufwärts perspektiv. Nach dem Isomorphiesatz für perspektive Intervalle (Satz 14) ist $s \vee u$ oberer Nachbar von u. Das Intervall $[u, a]$ ist aufwärts perspektiv zu $[z, v]$ und wegen $s \leq a$ ist $s \vee u \in [u, a]$. Wiederum aus dem Isomorphiesatz folgt: $s_z := s \vee u \vee z = s \vee z \in [z, v]$ ist oberer Nachbar von z.
In der Menge $M_z := \{m \in M_P \mid \mu m \geq z, \mu m \ngeq v, m \text{ irreduzibel}\}$ wird nun ein Merkmal m_z bestimmt, für das $g \swarrow\!\!\!\!\nearrow m_z$ gilt. M_z ist nicht leer, da $v > z$. Für jedes beliebige Merkmal $m \in M_z$ gilt

$$s \geq \mu m \wedge s \geq z \wedge s \geq u \wedge s = s_*.$$

Wegen der Nachbarschaftsbeziehung zwischen s und s_* ist daher $\mu m \wedge s = s$ oder $\mu m \wedge s = s_*$. Nimmt man für alle $m \in M_z$ $\mu m \geq s$ an, so folgt

$$\begin{aligned} z &= \inf\{\mu m \mid m \in M_P, \mu m \geq z\} \\ &= \inf\{\mu m \mid m \in M_P, \mu m \geq v\} \wedge \inf\{\mu m \mid m \in M_P, \mu m \ngeq v, \mu m \geq z\} \\ &= v \wedge \inf \mu[M_z] \\ &\geq v \wedge s = s. \end{aligned}$$

Somit wäre $z = s \vee z = s_z$ im Widerspruch zur oben gefolgerten Nachbarschaftsbeziehung zwischen z und s_z. Folglich existiert ein Merkmal $m_z \in M_z$ mit $\mu m_z \wedge s = s_*$, also $\mu m_z \wedge \gamma g = (\gamma g)_*$. Aus Hilfssatz 15 folgt $g \swarrow m_z$ und, da P modular ist, auch $g \swarrow\!\!\!\!\nearrow m_z$ (vgl. Beweis von Hilfssatz 16).
Ganz analog konstruiert man ein Merkmal $m_y \in M_y := \{m \in M_P \mid \mu m \geq y, \mu m \ngeq v, m \text{ irreduzibel}\}$ mit $g \swarrow\!\!\!\!\nearrow m_y$.

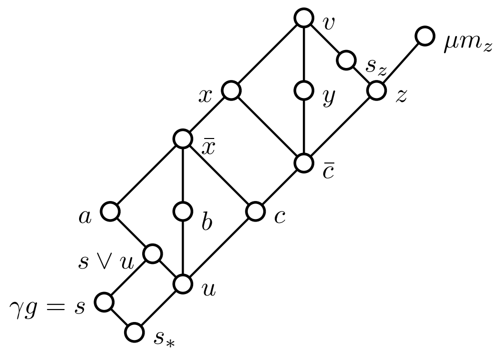


Abb. 6.4: Skizze zu Satz 93

Da $[u, a]$ aufwärts perspektiv zu $[b, \bar{x}]$ ist, kann man auch einen oberen Nachbarn $s_b \in [b, \bar{x}]$ von b konstruieren (gleiches Verfahren wie bei s_z mit $[b, \bar{x}]$, statt $[z, v]$). Man findet damit wieder ein Merkmal $m_b \in M_b := \{m \in M_P \mid \mu m \geq b, \mu m \ngeq \bar{x}, m \text{ irreduzibel}\}$ mit $g \swarrow\!\!\!\nearrow m_b$.
Diese drei Merkmale sind paarweise verschieden. Wäre $m_z = m_y$, so hätte man $m_z \in M_y \cap M_z$, damit $\mu m_z \geq z \vee y = v$ und folglich $m_z \notin M_z$. Aus $m_z = m_b$ folgte $m_b \in M_b \cap M_z$, damit $\mu m_z \geq \bar{x} \vee z = v$ und wieder $m_z \notin M_z$. Analog führt $m_y = m_b$ zu $m_y \notin M_y$.
Im Kontext $\mathbb{K}_P$ hat g hat also drei Doppelpfeile. Da $\mathbb{K}_P$ ein Summenkontext ist, müssen alle drei Pfeile in einem Summanden vorkommen, also in $\mathbb{K}$. Dies widerspricht der Voraussetzung und folglich ist die Annahme $\bar{M}_{3,3} \in \mathbf{SP}(V)$ widerlegt.
Mit dem gleichen Vorgehen zeigt man, dass es auch keine direkte Potenz von V geben kann, die $M_{3,3}$ als Unterverband enthält (man wählt dabei x statt $\bar{x}$). Folglich ist $M_{3,3} \notin \mathbf{HSP}(V)$ und somit $\text{Var}(V) \nsupseteq \text{Var}(M_{3,3})$.
Annahme: $\text{Var}(V) \supseteq \text{Var}(M_4)$. D. h. $M_4 \in \mathbf{HSP}(V)$. Wegen $M_{3,3} \notin \text{Var}(V)$ und Satz 84 ist jeder Verband in $\text{Var}(V)$ subdirektes Produkt von Verbänden der Länge zwei oder weniger, also $\text{Var}(V) \subseteq \mathfrak{M}^2$. Aus $M_4 \in \mathbf{HSP}(V)$ folgt nach Hilfssatz 92 $M_4 \in \mathbf{SP}(V)$. Also gibt es eine direkte Potenz P von V, die M_4 als Unterverband enthält. Dieser sei bezeichnet wie in Abb. 6.3. In Analogie zum obigen Vorgehen sei $\mathbb{K}_P$ der Summenkontext zu P mit den Summanden $\mathbb{K}$. Es gibt einen irreduziblen Gegenstand $g \in G_P$, so dass $s := \gamma g$ ein minimales Element von V ist bezüglich der Eigenschaften $s \leq a$ und $s \nleq u$. Ebenfalls findet man drei verschiedene Merkmale $m_b \in M_b := \{m \in M_P \mid \mu m \geq b, \mu m \ngeq v, m \text{ irreduzibel}\}$, $m_c \in M_c := \{m \in M_P \mid \mu m \geq c, \mu m \ngeq v, m \text{ irreduzibel}\}$ und $m_d \in M_d := \{m \in M_P \mid \mu m \geq d, \mu m \ngeq v, m \text{ irreduzibel}\}$ mit $g \swarrow\!\!\!\nearrow m_b$, $g \swarrow\!\!\!\nearrow m_c$ und $g \swarrow\!\!\!\nearrow m_d$. Da $\mathbb{K}_P$ ein Summenkontext ist, gehören alle drei Merkmale zum gleichen Summanden und damit hat g drei Doppelpfeile in $\mathbb{K}$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Damit ist auch die zweite Annahme widerlegt und es folgt: $\text{Var}(V) \subseteq \mathbf{M}_3$, also $V \in \mathbf{M}_3$.
Dual folgt die Aussage für die Merkmale. ■

Zusammen führen die Sätze 86 und 93 nun zur gewünschten Charakterisierung aller doppelt fundierten vollständigen Verbände in der Varietät $\mathbf{M}_3$.

Satz 94 *Es sei $\mathbb{K}$ ein bereinigter Kontext eines modularen, doppelt fundierten vollständigen Verbandes V. Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:*

1. $V \in \mathbf{M}_3$.
2. $\forall g \in G : |\{m \in M \mid g \swarrow\!\!\!\nearrow m\}| \leq 2$.
3. $\forall m \in M : |\{g \in G \mid g \swarrow\!\!\!\nearrow m\}| \leq 2$.

Beweis: Aus 1. folgen nach Satz 86 die Bedingungen 2. und 3. Umgekehrt folgt 1. sowohl aus 2. wie auch aus 3. nach Satz 93. ∎

Bemerkung 95 Eine analoge Charakterisierung für $\mathrm{Var}(M_4)$ und weitere Varietäten ist nicht einfach möglich. Z. B. ist $M_{3,3} \notin \mathrm{Var}(M_4)$. Jedoch hat ein bereinigter Kontext von $M_{3,3}$ pro Zeile und Spalte höchstens drei Doppelpfeile, wie man im nachstehenden Kontext sieht.

$M_{3,3}$	a	b	c	d	e
1	$\swarrow\!\!\!\nearrow$	$\swarrow\!\!\!\nearrow$	$\times$	$\swarrow\!\!\!\nearrow$	$\times$
2	$\swarrow\!\!\!\nearrow$	$\swarrow\!\!\!\nearrow$	$\times$	$\times$	$\swarrow\!\!\!\nearrow$
3	$\times$	$\times$	$\times$	$\swarrow\!\!\!\nearrow$	$\swarrow\!\!\!\nearrow$
4	$\swarrow\!\!\!\nearrow$	$\times$	$\swarrow\!\!\!\nearrow$		
5	$\times$	$\swarrow\!\!\!\nearrow$	$\swarrow\!\!\!\nearrow$		

7 Fazit und offene Probleme

In dieser Arbeit wurde das verbandstheoretische Konzept des Gerüstes für doppelt fundierte vollständige Verbände adaptiert. Die Konstruktion aus dem Kontext heraus geschah allein mit Methoden der Formalen Begriffsanalyse. Durch das Verbinden der Begriffsanalyse mit der Theorie projektiver Intervalle konnten auch spezielle Eigenschaften für die Gerüste modularer Verbände gezeigt werden. Die bei der Gerüstkonstruktion verwendeten Bindungen und deren Zusammenhang zu sup- bzw. inf-Morphismen wurden genutzt, um Kontexte subdirekter Produkte zu beschreiben. Konkrete Anwendung fanden diese in Kap. 6, in dem eine Liste von „Bausteinen“ zur Konstruktion der Kontexte zu doppelt fundierten vollständigen Verbänden der Varietät $\mathbf{M}_3$ angegeben ist. Schließlich wurde auch eine Charakterisierung der bereinigten Kontexte dieser Verbände vorgestellt, deren Beweis allerdings nicht nur auf Argumente der Formalen Begriffsanalyse gestützt ist. Den Abschluss der Arbeit bildet folgende Liste von Fragestellungen und offenen Problemen:

1. Gerüste von Kontexten - Ausblick
Die Resultate aus [11] sind weitgehend in die Sprache der Formalen Begriffsanalyse übersetzt. Es fehlt die Beschreibung der *abgeschlossenen Mengen paarweise unvergleichbarer, subirreduzibler Elemente* aus [11], Abschn. 2 und die Übersetzung der damit verbundenen Resultate. Offen bleibt auch die Frage nach einer Verwendung des Gerüstes zur Konstruktion von Begriffsverbänden aus dem Kontext. Bei der Konstruktion des Gerüstes zu einem Kontext $\mathbb{K}$ verzichtet man auf die Berechnung aller Begriffe des Ausgangskontextes und beschränkt sich auf die Berechnung der Begriffsverbände einer Menge von Teilkontexten. Je kleiner die 1-erzeugten Teilkontexte sind, desto leichter können die zugehörigen Begriffskomponenten berechnet werden. Soll trotzdem der gesamte Begriffsverband $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ konstruiert werden, so kann dieser nun aus dem Gerüst durch Bildung aller Suprema, durch Berechnung des Idealverbandes oder durch Berechnung aller abgeschlossenen Mengen paarweise unvergleichbarer, subirreduzibler Elemente nach [11], Satz 2.2 bestimmt werden. Für Kontexte mit kleinen 1-abgeschlossenen Teilkontexten könnte so möglicherweise ein Konstruktionsalgorithmus für $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ gefunden werden, der schneller arbeitet als bisher bekannte Algorithmen. Für Kontexte, die sich nur wenig in Teilkontexte zerlegen lassen (insbesondere 1-erzeugte Kontexte), können die bisherigen Algorithmen allerdings nicht durch die Gerüstidee verbessert werden. Das Gerüst eines 1-erzeugten Kontextes $\mathbb{K}$ ist nämlich stets $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}) \setminus \{(\emptyset^{II}, \emptyset^{I})\}$.

2. Ketten 1-erzeugter Teilkontexte
Satz 71 legt nahe, zur Konstruktion des Gerüstes möglichst wenige kleine 1-erzeugte Teilkontexte zu verwenden, da zu jeder Komponente der Begriffsverband berechnet werden muss. Hat man eine Menge 1-erzeugter Teilkontexte $\mathbb{K}_t$ $(t \in T)$ mit der Überdeckungseigenschaft und ist $\mathbb{K}_r \subseteq \mathbb{K}_s$ mit $r, s \in T$, so haben die Teilkontexte $\mathbb{K}_t$ $(t \in T \setminus \{r\})$ ebenfalls die Überdeckungseigenschaft und daher braucht der Begriffsverband zu $\mathbb{K}_r$ nicht berechnet zu werden. Für endliche Kontexte ist es somit sinnvoll, zur Gerüstkonstruktion stets nur die maximalen 1-erzeugten Teilkontexte zu verwenden, also solche, die nicht echt in einem anderen 1-erzeugten Teilkontext enthalten sind. Soll das Gerüst zum Beweis von Sätzen über

vollständige Verbände verwendet werden, so kann es interessant sein, auch das Gerüst von unendlichen Kontexten zu konstruieren. Dies führt zur Frage: *Gibt es einen doppelt fundierten Begriffsverband, dessen Standardkontext eine Kette von* 1*-erzeugten Teilkontexten enthält, in der jeder Teilkontext seinen Vorgänger echt enthält, die kein maximales Element hat?*

3. Vollständige Verbände und Varietäten

In Kap. 6 werden die doppelt fundierten vollständigen Verbände der Varietät $\mathbf{M}_3$ anhand ihrer bereinigten Kontexte charakterisiert. Es wäre nun interessant, auch andere Varietäten auf ihre vollständigen oder doppelt fundierten vollständigen Verbände hin zu untersuchen. Es sei $\mathrm{Var_v}(\mathbf{K})$ die Klasse aller vollständigen Verbände der Varietät $\mathrm{Var}(\mathbf{K})$ für eine Klasse $\mathbf{K}$ von Verbänden. Hilfssatz 96 macht deutlich, dass man (fast) immer Unterklassen von Varietäten betrachtet, da $\mathrm{Var_v}(\mathbf{K}) \subset \mathrm{Var}(\mathbf{K})$ gilt.

Hilfssatz 96 *Die einzige Varietät von Verbänden, die nur vollständige Verbände enthält, ist die Varietät aller einelementigen Verbände.*

Beweis: Der Verband D_2 gehört zu jeder Varietät von Verbänden, die nicht nur einelementige Verbände enthält. Es genügt also, in $\mathrm{Var}(D_2)$ einen Verband zu konstruieren, der nicht vollständig ist. Mit D_2 gehört auch das Produkt $V = \prod_{\mathbb{R}} D_2 = \{(a_i \mid i \in \mathbb{R}) \mid a_i \in \{0,1\}\}$ zu $\mathrm{Var}(D_2)$. Die Menge $S := \{(a_i \mid i \in \mathbb{R}) \mid \exists r \in \mathbb{R} : a_i = 0 \iff i < r\}$ bildet einen Unterverband von V, gehört also zu $\mathrm{Var}(D_2)$. S ist jedoch kein vollständiger Verband, da z. B. $\sup S = (1 \mid i \in \mathbb{R}) \notin S$. ■

Beim Beweis von Aussagen über Varietäten benutzt man häufig das **HSP**-*Theorem*:

$$\mathbf{HSP}(\mathbf{K}) = \mathrm{Var}(\mathbf{K}),$$

wobei $\mathbf{K}$ eine Klasse von Algebren ist (vgl. [7], Kap. V.1, Corollary 4). Um solche Beweise auch für vollständige Verbände zu adaptieren, läge es nahe, Operatoren $\mathbf{S}_v$ und $\mathbf{H}_v$ zu benutzen. Dabei sei $\mathbf{S}_v(\mathbf{K})$ die Klasse aller vollständigen Unterverbände der Elemente von $\mathbf{K}$ und $\mathbf{H}_v(\mathbf{K})$ die Klasse aller Bilder vollständiger Homomorphismen von Elementen aus $\mathbf{K}$. Ein ähnlicher Operator für Produkte braucht nicht erklärt zu werden, da Produkte von vollständigen Verbänden stets vollständig sind. $\mathbf{S}_v$ und $\mathbf{H}_v$ sind Hüllenoperatoren auf der Klasse aller vollständigen Verbände. Außerdem ist $\mathbf{H}_v\mathbf{S}_v\mathbf{P}(\mathbf{K})$ abgeschlossen gegen Bilder vollständiger Homomorphismen, gegen vollständige Unterverbände und Produkte. Ist $\mathbf{K}$ eine Menge vollständiger Verbände, so gilt offensichtlich $\mathbf{H}_v\mathbf{S}_v\mathbf{P}(\mathbf{K}) \subseteq \mathrm{Var_v}(\mathbf{K})$. Offen ist aber die Frage: *Gibt es in* $\mathrm{Var_v}(\mathbf{K})$ *einen vollständigen Verband, der nicht zu* $\mathbf{H}_v\mathbf{S}_v\mathbf{P}(\mathbf{K})$ *gehört?*
Ein weiteres Problem stellt die Modellierung in Kontexten dar. In doppelt fundierten Kontexten entsprechen die Vollhomomorphismen den verträglichen Teilkontexten (vgl. [5], Satz 11). In beliebigen Kontexten gilt dies allerdings nicht. Man kann jedoch Bindungspaare verwenden, um Vollhomomorphismen mit Kontexten zu beschreiben. Dennoch sind viele hilfreiche Resultate auf doppelt fundierte Begriffsverbände beschränkt. Wie in Kap. 6 könnte man versuchen, nur die doppelt fundierten vollständigen Verbände einer Varietät zu untersuchen.

Hilfssatz 97 *Die einzige Varietät von Verbänden, in der alle vollständigen Verbände doppelt fundiert sind, ist die Varietät aller einelementigen Verbände.*

Beweis: Analog zum Beweis von Hilfssatz 96 genügt es, in $\mathrm{Var}(D_2)$ einen vollständigen Verband zu konstruieren, der nicht doppelt fundiert ist. Mit D_2 gehört auch das Produkt $V = \prod_{\mathbb{R}} D_2 = \{(a_i \mid i \in \mathbb{R}) \mid a_i \in \{0,1\}\}$ zu $\mathrm{Var}(D_2)$. Betrachtet wird die Menge

$$S := \{(a_i \mid i \in \mathbb{R}) \mid a_j = 0 \Rightarrow \forall i \leq j : a_i = 0 \text{ und } a_j = 1 \Rightarrow \forall i \geq j : a_i = 1\}.$$

S ist offensichtlich eine Teilmenge von V. Außerdem gehören zu S sowohl $\sup\emptyset = (0 \mid i \in \mathbb{R})$ und $\inf\emptyset = (1 \mid i \in \mathbb{R})$. Gemeint sind dabei stets Infimum und Supremum in V. Es ist

$$\inf_{t\in T}(a_i^t \mid i \in \mathbb{R}) = (\inf_{t\in T} a_i^t \mid i \in \mathbb{R}),$$

wobei T eine nichtleere Indexmenge sei. Ist $\inf_{t\in T} a_j^t = 0$ an einer Stelle j, so existiert ein $s \in T$ mit $a_j^s = 0$. Demnach gilt $a_i^s = 0$ für alle $i \leq j$ und damit $\inf_{t\in T} a_i^t = 0$. Ist $\inf_{t\in T} a_j^t = 1$ an einer Stelle j, so gilt $a_j^t = 1$ für alle $t \in T$. Demnach ist für alle $i \geq j : a_i^t = 1$ und damit $\inf_{t\in T} a_i^t = 1$. S ist also gegen beliebige Infima abgeschlossen. Dual folgert man die Abgeschlossenheit gegen Suprema. S ist daher ein vollständiger Unterverband von V und somit ebenfalls ein Element von $\mathrm{Var}(D_2)$.
<u>Annahme:</u> S ist doppelt fundiert. Es seien $x = (0 \mid i \in \mathbb{R})$ und $y = (1 \mid i \in \mathbb{R})$. Es sei nun $s = (s_i \mid i \in \mathbb{R}) \in S$ minimal bezüglich der Eigenschaften $s \leq y$ und $s \nleq x$. Erfüllt werden diese Eigenschaften von allen Elementen von S außer von x selbst. Es existiert also ein Index $l \in \mathbb{R}$ mit $s_l = 1$. Setzt man $t = (t_i \mid i \in \mathbb{R})$ mit $t_i = 1$ für $i > l$ und $t_i = 0$ für $i \leq l$, so gilt $t \in S$, $t \leq y$, $t \nleq x$ und $t < s$ im Widerspruch zur Minimalität von s. Die Annahme ist daher falsch. ■

Das Beispiel im Beweis von Hilfssatz 96 zeigt, dass bereits $\mathbf{S}_v\mathbf{P}(\mathbf{K})$ vollständige Verbände enthält, die nicht doppelt fundiert sind, auch wenn $\mathbf{K}$ selbst eine Menge doppelt fundierter vollständiger Verbände ist. Insbesondere ist gezeigt, dass sich doppelte Fundiertheit nicht auf vollständige Unterverbände vererbt. Doppelt fundierte vollständige Verbände können vollständig subdirekt zerlegt werden in vollständig subdirekt irreduzible Faktoren. Folglich sind besonders die vollständig subdirekt irreduziblen vollständigen Verbände einer Varietät von Interesse und damit die Frage: *Gibt es einen vollständig subdirekt irreduziblen, doppelt fundierten vollständigen Verband in* $\mathrm{Var}(\mathbf{K})$, *der nicht subdirekt irreduzibel ist?* Ist diese Frage positiv zu beantworten, so hätte ein solcher Verband eine unendliche Grundmenge und damit auch einen unendlich großen 1-erzeugten Kontext.

4. Gerüste als partielle Halbverbände mit Komponenten
In Abschn. 5.4 wurden in Anlehnung an [4] die Komponenten des Gerüstes eingeführt. In [4] geschieht dies für Verbände endlicher Länge noch etwas allgemeiner.

Definition 98 Es sei $\mathfrak{K}$ eine Klasse von $\vee$-Halbverbänden und S ein partieller $\vee$-Halbverband. Man nennt S einen *partiellen $\mathfrak{K}$-Halbverband mit Komponenten* L_t $(t \in T)$, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. $\forall t \in T : L_t \in \mathfrak{K}$;
2. $S = \bigcup_{t\in T} L_t$;
3. $a \vee b = c$ für $a \neq c \neq b$ in S genau dann, wenn es ein $t \in T$ und $\underline{a}, \underline{b} \in L_t$ gibt mit $\underline{a} \leq c \geq b \geq \underline{b}$, $c \in L_t$ und $\underline{a} \vee_t \underline{b} = c$. ⋄

In [4], Theorem 6 wird dann gezeigt, dass das Gerüst eines Verbandes endlicher Länge für geeignetes $\mathfrak{K}$ stets ein partieller $\mathfrak{K}$-Halbverband mit Komponenten L_t $(t \in T)$ ist. Folglich gilt dies auch für das Gerüst eines Kontextes. Die Komponenten entsprechen dabei wie in Abschn. 5.4 den $\vee$-Halbverbänden

$$L_t = \{(C^{II}, C^{I}) \mid (C, C^{I_t}) \in \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_t), C^{I_t} \neq M_t\}, (t \in T).$$

Da das Gerüst auch zu Kontexten von doppelt fundierten vollständigen Verbänden beliebiger Länge konstruiert werden kann, liegt eine Verallgemeinerung von Definition 98 nahe. Die ersten beiden Bedingungen lassen sich ohne Probleme auf vollständige Verbände übertragen. Schwieriger ist die dritte Bedingung. In Verbänden endlicher Länge lassen sich beliebige Suprema immer durch Suprema über endliche Mengen ausdrücken und damit auf die Supremum-Operation $\vee$ zurückführen. Dieser Vorteil entfällt nun und folglich müsste die dritte Bedingung auch beliebige Suprema charakterisieren. [4], Theorem 6 beschreibt nicht nur Gerüste als partielle $\mathfrak{K}$-Halbverbände, sondern charakterisiert sogar diejenigen partiellen $\mathfrak{K}$-Halbverbände, die isomorph zum Gerüst eines Verbandes endlicher Länge sind. Eine Formulierung der dritten Bedingung für vollständige Verbände sollte daher so gewählt werden, dass sich ein ähnlicher Charakterisierungssatz formulieren lässt. Ebenfalls hilfreich wäre es, die Bedingung auf der Ebene der Kontexte zu formulieren. Damit könnte Satz 83 nicht nur als Beschreibung von Teilkontexten, sondern analog zu [4], Theorem 9 als Charakterisierung formuliert werden. Zu einem Kontext $\mathbb{K}$ mit (nicht notwendigerweise verträglichen) Teilkontexten $\mathbb{K}_t$ $(t \in T)$ müsste man angeben können, ob

$$\bigcup_{t \in T} \{(C^{II}, C^{I}) \mid (C, C^{I_t}) \in \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_t), C^{I_t} \neq M_t\}$$

die drei (neuen) Bedingungen erfüllt.

5. Konstruktion eines Kontextes zu einem gegeben Pfeilbild
Satz 93 besagt für Kontexte modularer, doppelt fundierter vollständiger Verbände, dass die zugehörigen Begriffsverbände zu $\mathbf{M}_3$ gehören, wenn pro Zeile und Spalte höchstens zwei Doppelpfeile stehen. Der Beweis nutzt Sätze über projektive Verbände. Aus begriffsanalytischer Sicht wäre ein anderes Vorgehen naheliegender. Da doppelt fundierte vollständige Verbände in vollständig subdirekt irreduzible Faktoren zerlegt werden können, haben die zugehörigen reduzierten Kontexte 1-erzeugte Teilkontexte mit der Überdeckungseigenschaft. Es genügt also herauszufinden, welche 1-erzeugten pfeilabgeschlossenen Kontexte höchstens zwei Doppelpfeile pro Spalte und Zeile haben, und nachzuweisen, dass die zugehörigen Begriffsverbände zu $\mathbf{M}_3$ gehören oder aber nicht modular sind. Pfeilbilder dieser 1-erzeugten Kontexte sind entweder Ketten oder Kreise der Form:

$$g_1 \swarrow\!\!\!\!\!\nearrow m_1 \swarrow\!\!\!\!\!\nearrow g_2 \swarrow\!\!\!\!\!\nearrow m_2 \swarrow\!\!\!\!\!\nearrow, \ldots, \swarrow\!\!\!\!\!\nearrow g_n \swarrow\!\!\!\!\!\nearrow m_n \swarrow\!\!\!\!\!\nearrow, \ldots$$

Endliche Ketten oder Kreise führen zu endlichen subdirekt irreduziblen Verbänden. In $\mathbf{M}_3$ sind das nur M_3 und D_2. Es müsste dann z. B. gezeigt werden, dass die Begriffsverbände von endlichen 1-erzeugten Kontexten, deren Ketten mehr als drei Gegenstände beinhalten, nicht zu $\mathbf{M}_3$ gehören. Dazu wäre es hilfreich, vom Pfeilbild auf den Kontext schließen zu können, um einen Widerspruch z. B. zum modularen Gesetz zu finden. Also: *Wie bestimmt man alle Kontexte, deren Pfeilgraphen einen gegeben Pfeilgraphen enthalten bzw. mit diesem übereinstimmen?* Einige Resultate dazu findet man in [6], im Kapitel *On context patterns associated with concept lattices.* Z. B. besagt Corollary 3 (ebd.), dass jeder beliebige Pfeilgraph realisiert werden kann, d. h., es gibt einen Kontext, dessen Pfeilgraph diesen Graphen enthält.

Vermutung: In einem reduzierten Kontext $\mathbb{K}$ mit genau zwei Doppelpfeilen pro Zeile und Spalte gilt $g \not{I}\, m \iff g \swarrow\!\!\!\!\!\nearrow m$ für $g \in G$ und $m \in M$.

Träfe die Vermutung zu, so ließe sich der Beweis von Satz 93 abkürzen. Der Begriffsverband von einem reduzierten Kontext mit mehr als drei Gegenständen und mehr als drei Merkmalen und genau zwei Pfeilen pro Zeile und Spalte wäre dann stets nicht modular.

Hat man nämlich dann folgendes Pfeilbild:

$$\ldots \mathrel{\swarrow\!\!\!\!\nearrow} m_a \mathrel{\swarrow\!\!\!\!\nearrow} g_1 \mathrel{\swarrow\!\!\!\!\nearrow} m_b \mathrel{\swarrow\!\!\!\!\nearrow} g_2 \mathrel{\swarrow\!\!\!\!\nearrow} m_c \mathrel{\swarrow\!\!\!\!\nearrow} g_3 \mathrel{\swarrow\!\!\!\!\nearrow} m_d \mathrel{\swarrow\!\!\!\!\nearrow} g_4 \mathrel{\swarrow\!\!\!\!\nearrow} \ldots$$

für Gegenstände $g_1, g_2, g_3, g_4 \in G$ und Merkmale $m_a, m_b, m_c, m_d \in M$, so bilden die Begriffe $\gamma g_1 \wedge \gamma g_3, \gamma g_1, \gamma g_1 \vee \gamma g_2, \gamma g_3$ und $\gamma g_1 \vee \gamma g_2 \vee \gamma g_3$ einen Unterverband isomorph zu N_5 (Pentagon) im Widerspruch zur vorausgesetzten Modularität (vgl. [7], Kap. II.1, Theorem 2).

6. Übertragung von [4] in die Sprache der Formalen Begriffsanalyse

In [4] wird ein Satz über Verbände mit Hilfe von Gerüsten bewiesen. Dabei werden jedoch auch Sätze über Varietäten, projektive Verbände und erzeugte Unterverbände benutzt, also verbandstheoretische Konzepte, die erst noch mit Begriffsanalyse beschrieben werden müssen. Das Ergebnis einer Übertragung der beiden Hauptresultate (Theoreme 1 und 2) auf vollständige Verbände kann jedoch vorweggenommen werden. Dazu wird folgende Definition benötigt, deren erster Teil aus [4], Abschn. 1 übernommen ist.

Definition 99 Ein Verband L heiße von einer geordneten Menge P *minimal erzeugt*, wenn L eine Teilmenge enthält, die zu P ordnungs-isomorph ist, und L von jeder zu P ordnungs-isomorphen Teilmenge erzeugt wird.
Ein vollständiger Unterverband U eines vollständigen Verbandes V heiße von einer Teilmenge $P \subseteq V$ *vollständig minimal erzeugt*, wenn U der kleinste vollständige Unterverband von V ist, der P enthält. $\diamond$

Satz 100 *Es sei V ein modularer vollständiger Verband und U ein Unterverband von V, der von einer vierelementigen ungeordneten Teilmenge von V vollständig minimal erzeugt wird. Dann ist U isomorph zu einem der Verbände der Liste von [4], Theorem 1 oder zu einem Verband, der entsteht, wenn man in einem Verband der Liste noch einen zusätzlichen oberen Nachbarn des größten Elementes und/oder einen zusätzlichen unteren Nachbarn des kleinsten Elementes einfügt. Die Liste aller solcher vollständigen Verbände hat also 68 Elemente.*

Beweis: Es sei U ein vollständiger Unterverband und vollständig minimal erzeugt von einer vierelementigen ungeordneten Teilmenge von V. Dann enthält U einen (zunächst nicht notwendigerweise vollständigen) Unterverband $S \leq U$ der von einer vierelementigen ungeordneten Teilmenge als (nicht notwendigerweise vollständiger) Unterverband erzeugt wird. Nach [4], Theorem 2 gibt es dann einen Unterverband $T \leq S$ der von einer vierelementigen Teilmenge minimal erzeugt wird. Nach [4], Theorem 2 ist T isomorph zu einem der 17 in [4], Theorem 1 angegebenen Verbände. Da T also endlicher Unterverband von U ist, ist $T \cup \{1_U, 0_U\}$ ein vollständiger Unterverband von U der von einer vierelementigen ungeordneten Menge als vollständiger Unterverband in V erzeugt wird. Da U vollständig minimal erzeugt ist, muss folglich $U = T \cup \{1_U, 0_U\}$ sein. $\blacksquare$

Satz 101 *Jeder modulare vollständige Verband V, der vier ungeordnete Elemente enthält, enthält auch einen von einer vierelementigen, ungeordneten Menge vollständig minimal erzeugten Unterverband.*

Beweis: V enthält einen von einer vierelementigen ungeordneten Menge erzeugten Unterverband $U \leq V$. Auf diesen lässt sich [4], Theorem 2 anwenden und somit enthält V einen Unterverband $M \leq V$, der isomorph ist zu einem der in [4], Theorem 1 angegebenen Verbände. Es ist dann $M \cup \{1_V, 0_V\}$ ein vollständig minimal erzeugter vollständiger Unterverband des vollständigen Verbandes V. $\blacksquare$

Literaturverzeichnis

[1] Birkhoff, G. : Lattice theory. In: *Colloquium Publications* Bd. 25. 3. Auflage. Amer. Math. Soc., 1967

[2] Day, A. : Splitting algebras and a weak notion of projectivity. In: *Algebra Universalis* 5 (1975), Nr. 1, S. 153–162

[3] Duquennes, V. : The core of finite lattices. In: *Discrete mathematics* 88 (1991), S. 133–147

[4] Ganter, B. ; Poguntke, W. ; Wille, R. : Finite sublattices of four-generated modular lattices. In: *Algebra Universalis* 12 (1981), S. 160–171

[5] Ganter, B. ; Wille, R. : *Formale Begriffsanalyse: Mathematische Grundlagen.* Springer-Verlag, 1996

[6] Geyer, W. : *Intervalldopplung und verwandte Konstruktionen bei Verbänden*, Technische Hochschule Darmstadt, Fachbereich Mathematik, Diss., 1992

[7] Grätzer, G. : *General Lattice Theory.* 2. Auflage. Birkhäuser Verlag, 1998

[8] Grätzer, G. ; Lakser, H. : On complete congruence lattices of complete lattices. In: *Trans. Amer. Math. Soc.* 327 (1991), Nr. 1, S. 385–405

[9] Jónsson, B. : Algebras whose congruence lattices are distributive. In: *Math. Scand.* 21 (1967), S. 110–121

[10] Jónsson, B. : Equational classes of lattices. In: *Math. Scand.* 22 (1968), S. 187–196

[11] Wille, R. : Subdirekte Produkte vollständiger Verbände. In: *J. reine angew. Math.* 283/284 (1976), S. 53–70

ERKLÄRUNG

Hiermit erkläre ich, dass ich die am heutigen Tag eingereichte Diplomarbeit zum Thema „Gerüste formaler Kontexte“ unter Betreuung von Prof. Dr. rer. nat. Bernhard Ganter selbständig erarbeitet, verfasst und Zitate kenntlich gemacht habe. Andere als die angegebenen Hilfsmittel wurden von mir nicht benutzt.

Datum Unterschrift