

7. Übung „Künstliche Intelligenz“

Wintersemester 2007/2008

Logik

1. Erklären Sie anhand von Beispielaussagen den *Modus Ponens* und *Modus Tollens*!

Modus Ponens: „Wenn es regnet, gehe ich nicht nach draußen.“ ($A \Rightarrow B$): Es regnet (A):
Ich gehe nicht nach draußen (B).

Modus Tollens: „Wenn es regnet, gehe ich nicht nach draußen.“ ($A \Rightarrow B$): Ich gehe nach
draußen ($\neg B$): Es regnet nicht ($\neg A$).

2. Folgende Sachverhalte sind bekannt:

- Jens wacht auf.
- Jens holt einen Wischlappen.
- Wenn Jens aufwacht und sein Zimmer säubert, ist Jens' Mutter erfreut.
- Wenn Jens einen Wischlappen holt, dann säubert er auch sein Zimmer.

- a) Formalisieren Sie die Aussagen in Prädikatenlogik erster Stufe.

Um die Aussagen zu modellieren, werden die zwei Funktionen *ZimmerVon* und *MutterVon* eingeführt. Damit ergeben sich folgende Assertionen:

$\mathcal{A} := \text{WachtAuf}(jens)$

$\mathcal{B} := \exists x(\text{IstWischlappen}(x)) \wedge \text{Holt}(jens, x)$

$\mathcal{C} := \text{WachtAuf}(jens) \wedge \text{Saeubert}(jens, \text{ZimmerVon}(jens)) \Rightarrow \text{Erfreut}(\text{MutterVon}(jens))$

$\mathcal{D} := \exists x(\text{IstWischlappen}(x)) \wedge \text{Holt}(jens, x) \Rightarrow \text{Saeubert}(jens, \text{ZimmerVon}(jens))$

- b) Leiten Sie ab, dass die Mutter von Jens erfreut ist. Führen Sie den Beweis mittels *Modus Ponens*.

Aus \mathcal{B} und \mathcal{D} folgt durch den Modus Ponens: $\text{Saeubert}(jens, \text{ZimmerVon}(jens))$.
Damit folgt zusammen mit \mathcal{A} durch Anwendung des Modus Ponens bei \mathcal{C} :
 $\text{Erfreut}(\text{MutterVon}(jens))$.

3. Wie schafft es der dritte weise Mann beim „Wise Men Puzzle“ die Farbe seines Hutes zu bestimmen?

Hätte er einen schwarzen Hut, so hätte der zweite weise Mann gewusst, dass sein Hut weiss ist. Denn wäre er ebenfalls schwarz, so hätte der erste Weise seine Hutfarbe gewusst, die dann zwingend weiss hätte sein müssen.

4. Warum ist Modallogik hilfreich zur Modellierung dieses Problems?

Mit Modallogik kann man ausdrücken, was welcher Weise weiß, aber auch was welcher Weise nicht weiß.

Unsicherheit, Wagheit

1. Bei einem medizinischen Test wird ein Symptom S , das für eine Krankheit K indikativ ist, gefunden. Es sei $P(S|\neg K)$ die Wahrscheinlichkeit, dass das Symptom gefunden wird, obwohl die Krankheit nicht vorliegt. Stellen Sie die Wahrscheinlichkeit des Vorliegens von S , d. h. $P(S)$, als Funktion der vier Größen $P(S|K)$, $P(K)$, $P(S|\neg K)$ sowie $P(\neg K)$ dar.

In der angegebenen Situation gilt entweder K oder $\neg K$, d. h., wenn S gilt, gilt entweder S und K oder S und $\neg K$. Diese Wahrscheinlichkeiten lassen sich berechnen durch:

$$P(S \wedge K) = P(S|K)P(K) \quad \text{bzw.} \quad P(S \wedge \neg K) = P(S|\neg K)P(\neg K) \quad (1)$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist damit:

$$P(S) = P(S|K)P(K) + P(S|\neg K)P(\neg K). \quad (2)$$

2. Ein Arzt hat eine Patientin mit mehreren Verfahren auf Brustkrebs untersucht und ist zu der Einschätzung gekommen, dass zu 99 % kein Krebs vorliegt (die Wahrscheinlichkeit, dass Krebs vorliegt ist 1 %). Nun kommt ein verspäteter Röntgenbefund, der für eine Krebserkrankung spricht. Die Wahrscheinlichkeit $P(S|K)$ ist bei dieser Art Röntgenbefund 78.2 %, die Wahrscheinlichkeit, dass ein Symptom gefunden wird, obwohl die Krankheit nicht vorliegt ist 9.6 %. Die Neueinschätzung nach Bekanntwerden eines solchen zusätzlichen Befundes ist empirisch untersucht worden. Es zeigt sich, dass etwa 95% der untersuchten Ärzte zu einer Neueinschätzung von etwa 75 %-iger Wahrscheinlichkeit für das Vorliegen von Brustkrebs, d.h. von $P(K|S)$ gelangen. Berechnen Sie dagegen die (überraschende) Wahrscheinlichkeit $P(K|S)$ mit der Bayes-Formel.

Mit dem Ergebnis der vorigen Aufgabe wird die Bayes-Formel zu:

$$P(K|S) = \frac{P(S|K)P(K)}{P(S|K)P(K) + P(S|\neg K)P(\neg K)} \quad (3)$$

Durch das Einsetzen von $P(S|K) = 0.792$, $P(K) = 0.001$, $P(S|\neg K) = 0.096$ und $P(\neg K) = 0.99$ erhält man eine Wahrscheinlichkeit von knapp 7.6 %, dass die Patientin Krebs hat — gegenüber von Ärzten in dieser Situation intuitiv geschätzten 75 %!