



# Kapitel 3: Constraints

## Teil 1

(Dieser Foliensatz basiert auf Material von Mirjam Minor, Humboldt-Universität Berlin, WS 2000/01)



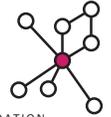
# Constraint Satisfaction Problem (CSP)

Problem bei Suchverfahren: Kombinatorische Explosion

Häufig sind zusätzlich zum eigentlichen Problem noch eine Reihe einschränkender Nebenbedingungen (**Constraints**) gegeben, die ebenfalls zu erfüllen sind.

Wie können Constraints bei der Suche nach einer Lösung helfen ?

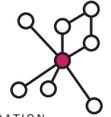
- durch Testen von Zwischenergebnissen bzgl. der Constraints lassen sich Irrwege frühzeitig erkennen
- durch Verkettung mehrerer Constraints treten manchmal Lösungen hervor (**Constraint Propagation**)



---

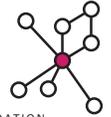
# Anwendungsbeispiele

- Stundenplanerstellung
- Färbeprobleme in Graphen
- Transportprobleme / Logistik / Produktionsplanung
- Interpretation zweidimensionaler Linienzeichnungen / Bildererkennung
- Algebren zum zeitlichen Schließen



## Mögliche Fragestellungen

- Ist eine Lösung unter den gegebenen Nebenbedingungen möglich?
- Wie sieht der Lösungsraum aus ?
- Falls keine Lösung existiert, kann man durch minimale Abweichung von den Constraints (abschwächen bzw. weglassen) zu einer Lösung kommen ?



## Formale Definitionen

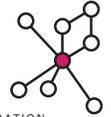
Gegeben: Variablenmenge  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  mit den Wertebereichen  $Dom(v_i)$  für alle  $v_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ).

Sei  $Dom(V) = Dom(v_1) \times \dots \times Dom(v_n)$

Ein **k-stelliges Constraint**  $C$  über  $V' = \{v'_1, \dots, v'_k\} \subseteq V$  ist ein Teilmenge  $C \subseteq Dom(v'_1) \times \dots \times Dom(v'_k)$ .

Ein Constraint mit Stelligkeit  $k = 1$  heißt **unärer Constraint**

Ein Constraint mit Stelligkeit  $k = 2$  heißt **binärer Constraint**



## Formale Definitionen (2)

Ein **Constraint-Netz**  $\mathcal{C}$  über  $V$  ist eine Menge  $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_m\}$ , wobei jedes  $C_i$  ein Constraint über einer Menge  $V_i \subseteq V$  ist. Ein **binäres Constraint-Netz** ist ein Constraint-Netz, das nur unäre und binäre Constraints enthält.

Sei  $\beta : V \rightarrow \bigcup_i \text{Dom}(v_i)$  eine Belegung, die jedem  $v_i \in V$  ein Element aus  $\text{Dom}(v_i)$  zuordnet.

Die Belegung  $\beta$  **erfüllt** ein Constraint  $C$  über  $V' = \{v'_1, \dots, v'_k\}$ , falls  $[\beta(v'_1), \dots, \beta(v'_k)] \in C$ .  $[\beta(v'_1), \dots, \beta(v'_k)] \in C$  heißt **lokale Lösung**.

Die Belegung  $\beta$  erfüllt das Constraint-Netz  $\mathcal{C}$  und heißt **globale Lösung**, falls  $\beta$  alle  $C \in \mathcal{C}$  erfüllt.



# Beispiele

1. Das folgende Problem soll mit Constraints formuliert werden:  
Finde zwei natürliche Zahlen  $x$  und  $y$ , so daß  $x + y = 7$  unter der Voraussetzung  $x > y > 2$ .

$$V = \{x, y\}, \text{ Dom}(x) = \text{Dom}(y) = \mathbb{N}$$

$$C_1 = \{y \in \mathbb{N} : y > 2\} \subseteq \text{Dom}(y) \text{ über } V_1 = \{y\}$$

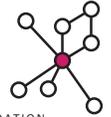
$$C_2 = \{[x, y] \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x > y\} \subseteq \text{Dom}(x) \times \text{Dom}(y) \text{ über } V_2 = \{x, y\}$$

$$C_3 = \{[x, y] \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x + y = 7\} \subseteq \text{Dom}(x) \times \text{Dom}(y) \text{ über } V_3 = \{x, y\}$$

$$\mathcal{C} = \{C_1, C_2, C_3\}$$

$x = 2$  und  $y = 1$  ist eine lokale Lösung bzgl.  $C_2$ .

$x = 4$  und  $y = 3$  ist eine globale Lösung.



## Beispiele

2. Das Constraintnetz  $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$  sei wie folgt gegeben

$$V = \{x, y, z\}, \text{ Dom}(x) = \text{Dom}(y) = \text{Dom}(z) = [0, 1]$$

$$C_1 = \{[x, y] : x > y\} \text{ über } V_1 = \{x, y\}$$

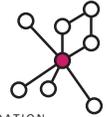
$$C_2 = \{[y] : y > 0.5\} \text{ über } V_2 = \{y\}$$

$$C_3 = \{[x, z] : x + z = 1\} \text{ über } V_3 = \{x, z\}$$

$$C_4 = \{[x, z] : x < z\} \text{ über } V_4 = \{x, z\}$$

$[0.5, 0.7, 0.5]$  ist eine lokale Lösung bzgl.  $C_3$ .

Eine globale Lösung existiert nicht (Aus  $C_1, C_2, C_4$  folgt  $z > x > y > 0.5$ ; Widerspruch mit  $C_3$   $x + z = 1$ ). Die gegebenen Voraussetzungen sind inkonsistent. Ohne  $C_4$  wäre  $[0.7, 0.6, 0.3]$  eine globale Lösung.



# Binäre Constraint-Netze als Graphen

Knoten entsprechen den Variablen, Kanten entsprechen den binären Constraints; Unäre Constraints sind als Einschränkung des Wertebereichs der Variablen enthalten. Bsp.: Vierfarbenproblem

Constraint-Netze höherer Ordnung lassen sich in binäre C.-N. überführen.

→ Vereinfachung / Vereinheitlichung der Probleme

→ verschiedene Verfahren (speziell für endliche Wertebereiche) zum Finden einer Lösung

Aber: Komplexität der Umwandlung hoch bzw. Umwandlung nicht möglich



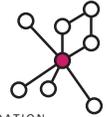
## CSP als Suchproblem

**Ausgangszustand:** Die leere Zuweisung, d.h. alle Variablen sind undefiniert

**Nachfolgerfunktion:** Belegung einer weiteren Variablen, so dass kein Konflikt mit vorherigen Zuweisungen entsteht.

**Zieltest:** Sind alle Variablen definiert?

**Pfadkosten:** konstant, z.B. 1 pro Schritt

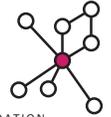


# Lösung von CSP-Suchproblemen

Jede Lösung hat Tiefe  $|V|$ . Daher ist Tiefensuche geeignet.

Es kommt nicht auf den Suchpfad an. Daher sind lokale Methoden gut geeignet.

Heuristik des minimalen Konflikts: Wert der Zuordnung  $x \leftarrow w$  ist Summe über alle noch undefinierten Variablen  $y$  der Anzahl der Werte  $v \in D(y)$ , so dass die Belegung  $\{x \leftarrow w, y \leftarrow v\}$  ein Constraint verletzt.  
Bsp.:  $4 \times 4$ -Dame mit  $(a, 1)$  belegt. Ist  $(b, 3)$  oder  $(b, 4)$  besser?



# Komplexität/Unentscheidbarkeit

Constraint-Erfüllungsprobleme sind bei endlichen Wertebereichen im allgemeinen NP-vollständig.

In den meisten praktischen Anwendungen sind sie aber um Größenordnungen besser als allgemeine Suchverfahren.

Gleichungssysteme und speziell Diophantische Gleichungen (ganzahlige Lösungen für  $a_1 x_{1,1}^{i_{1,1}} \dots x_{n,1}^{i_{n,1}} + \dots + a_m x_{1,m}^{i_{1,m}} \dots x_{n,m}^{i_{n,m}} = c$ ) lassen sich als Constraint-Erfüllungsprobleme (Constraint Satisfaction Problem; CSP) beschreiben. Diese sind beweisbar unentscheidbar, d.h. es ist kein universeller Lösungsalgorithmus für CSP möglich.