4. Übung zur Vorlesung "Objektorientierte und Deduktive Datenbanken"
im Wintersemester 2004
– mit Musterlösungen –

Prof. Dr. Gerd Stumme, Dipl.-Inform. Christoph Schmitz

29. November 2004

Aufgabe 1 – Herbrand-Modelle

1. Sei $\Sigma = (C, F, R, d)$ definiert durch $C = \{Odeon, StMichel, Cite, Chatelet\}$, $F = \emptyset$, $R = \{next, connected\}$ und $d(next) = 2, d(connected) = 2$.

   Weiterhin gelten die Axiome $\Psi = \{\forall x.\forall y.(next(x, y) \rightarrow connected(x, y)),$
   $\forall x.\forall y.\forall z.(connected(x, y) \wedge next(y, z) \rightarrow connected(x, z))\}$.

   Geben Sie das Herbrand-Universum, die Herbrand-Basis, die Herbrand-Präinterpretation und 4 Herbrand-Interpretationen an, von denen genau zwei auch Herbrand-Modelle sein sollen!

   Universum: $U_H = \{Odeon, StMichel, Cite, Chatelet\}$

   Basis:

$$\begin{aligned}
B_H \quad = \quad & \{next(Odeon, Odeon), \ldots, next(Odeon, Chatelet), \\
& \ldots \\
& next(Chatelet, Odeon), \ldots, next(Chatelet, Chatelet), \\
& connected(Odeon, Odeon), \ldots, connected(Odeon, Chatelet), \\
& \ldots \\
& connected(Chatelet, Odeon), \ldots, connected(Chatelet, Chatelet)\}
\end{aligned}$$

   Zur Präinterpretation gehören außerdem die Interpretation $\mathcal{C}$ für Konstantensymbole mit $\mathcal{C}(c) = c$ und eine leere Interpretation $\mathcal{F} = \emptyset$ für die Funktionssymbole.

   Mögliche Interpretationen sind z. B.:

- P_1 definiert als

$$\begin{aligned} P_1(next) &= \{(Odeon, Cite), (Cite, StMichel)\} \\ P_1(connected) &= \{(Odeon, StMichel)\} \end{aligned}$$

ist kein Modell (wegen des ersten Axioms müßte $P_1(next) \subseteq P_1(connected)$ sein).

- P_2 definiert als

$$\begin{aligned} P_2(next) &= \{(Odeon, Cite), (Cite, StMichel)\} \\ P_2(connected) &= \{(Odeon, Cite), (Cite, StMichel), (Odeon, StMichel)\} \end{aligned}$$

ist ein Modell.

- P_3 definiert als

$$\begin{aligned} P_3(next) &= \emptyset \\ P_3(connected) &= \{(Odeon, Cite), (Cite, StMichel), (Odeon, StMichel)\} \end{aligned}$$

ist ein Modell.

- P_4 definiert als

$$\begin{aligned} P_4(next) &= \{(Odeon, Cite), (Cite, StMichel)\} \\ P_4(connected) &= \{(Odeon, Cite), (Cite, StMichel)\} \end{aligned}$$

ist kein Modell (wegen des zweiten Axioms müßte $(Odeon, StMichel) \in P_4(connected)$ sein).

2. Was ist das kleinste Herbrand-Modell von

$$\begin{aligned} \Psi' \;:=\; & \Psi \cup \{next(Odeon, StMichel), \\ & next(StMichel, Odeon), \\ & next(Cite, Chatelet), \\ & next(Chatelet, Cite), \\ & next(Cite, StMichel)\} \end{aligned}$$

?

PS. Siehe auch `http://www.citefutee.com/orienter/cv/carteparis.php` ;-)

Das kleinste Modell besteht aus Basis, Universum, ... wie in 1 mit folgenden Interpretationen:

$$
\begin{aligned}
P(next) &= \{(Odeon, StMichel), (StMichel, Odeon),\\
&\quad (Cite, Chatelet), (Chatelet, Cite),\\
&\quad (Cite, StMichel)\}\\[1em]
P(connected) &= \{(Odeon, StMichel), (Chatelet, Cite),\\
&\quad (Chatelet, StMichel), (Chatelet, Odeon),\\
&\quad (Cite, Chatelet), (Cite, StMichel),\\
&\quad (Cite, Odeon), (StMichel, Odeon),\\
&\quad (Odeon, Odeon), (StMichel, StMichel),\\
&\quad (Cite, Cite), (Chatelet, Chatelet)\}
\end{aligned}
$$

3. Was bedeutet dies für die Pariser Métro?

   Der Tunnel zwischen St Michel und Cité ist in der einen Richtung vollgelaufen, hier ist das Métro-Netz in einer Richtung unterbrochen :-(

4. Welche Bedeutung haben Ψ, $\Psi' \setminus \Psi$ und das in 2 angegebene Herbrandmodell im Sinne deduktiver Datenbanken?

   $\Psi' \setminus \Psi$ stellt die *extensionale Datenbasis* dar, vergleichbar mit Tupeln in den Tabellen einer relationalen Datenbank.

   Ψ beschreibt, wie die *intensionale Datenbasis* aus der extensionalen Datenbasis abgeleitet werden kann.

   Das Herbrand-Modell (bzw. die Interpretationen der Prädikate darin) umfaßt die extensionale und die intensionale Datenbasis.

Aufgabe 2 – Endliche vs. unendliche Modelle

Erinnern Sie sich an $\Phi = \{\varphi_i \mid i > 0\}$, wobei φ_i ausdrückt, daß es mindestens i paarweise verschiedene Elemente im Universum gibt; dies war ein Beispiel für eine Menge von Sätzen, für die $\models_{FIN}$ und $\models$ unterschiedlich sind.

Skizzieren Sie entsprechende φ_i! Sie können davon ausgehen, daß es ein Prädikatensymbol "=" mit der erwarteten Interpretation gibt.

$$
\begin{aligned}
\varphi_i \quad = \quad & \exists x_1.\exists x_2.\ldots\exists x_i.(\\
& \quad x_1 \neq x_2 \wedge \cdots \wedge x_1 \neq x_i \\
& \quad \wedge \\
& \quad x_2 \neq x_3 \wedge \cdots \wedge x_2 \neq x_i \\
& \quad \wedge \cdots \wedge \\
& \quad x_{i-1} \neq x_i \\
&)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3 – Prädikatenlogik und Datentypen

Die Prädikatenlogik geht von einem einheitlichen Universum aus; in der Vorlesung wurde darauf hingewiesen, daß Datentypen, die an bestimmten Stellen von Prädikaten zulässig sind, durch weitere Prädikate realisiert werden können.

Gehen Sie von einer Signatur aus, deren Universum die Namen von Personen und ihre Geburtsdaten enthält; es umfasse z.B. die Konstanten $Goedel$, $Herbrand$, $Skolem$, 1906, 1908, 1887, $Bruenn$, $Paris$, $Sandsvaer$.

Es gebe zweistellige Prädikate $geborenAm$ und $geborenIn$.

Wie können Sie durch zusätzliche Prädikate und Axiome sicherstellen, daß in jedem Modell für diese Signatur die Prädikate "sinnvoll" interpretiert werden (daß also $geborenAm$ nur Personen und Geburtsdaten verbindet usw.)?

- Zusätzliche Prädikatensymbole $Person$, $Datum$, Ort für die jeweiligen Typen mit entsprechenden Interpretationen:
  - $Person^I = \{Goedel, Herbrand, Skolem\}$
  - $Datum^I = \mathbb{N}$
  - $Ort^I = \{Bruenn, Paris, Sandsvaer\}$
- Axiome, die den entsprechenden Typ an der entsprechenden Stelle fordern:
  - $\forall x.\forall y.(geborenAm(x, y) \rightarrow Person(x), Datum(y))$
  - $\forall x.\forall y.(geborenIn(x, y) \rightarrow Person(x), Ort(y))$