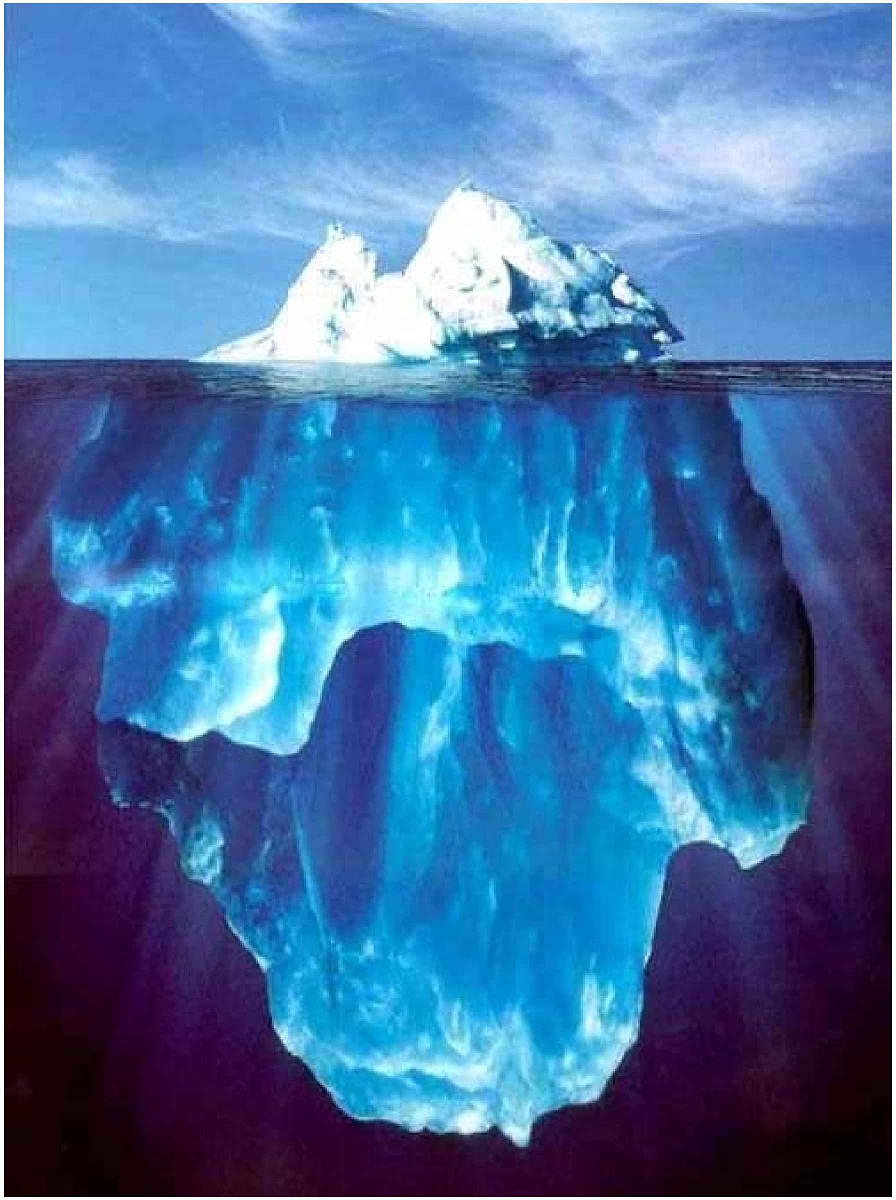
# Formale Begriffsanalyse



Teil 2:

- Assoziationsregeln und FBA
- Titanic Algorithmus
- Begriffliches Skalieren
  ( = quantitative Assoziationsregeln)

# Bases of Association Rules

{ veil color: white, gill spacing: close } $\rightarrow$ { gill attachment: free }

Support: 78,52 % Confidence: 99,6 %

**Classical Data Mining Task:** Find, for given minsupp, minconf $\in$ [0,1], all rules with support and confidence above these thresholds

**Our task:** Find a **basis** of rules, i.e., a minimal set of rules out of which all other rules can be derived.

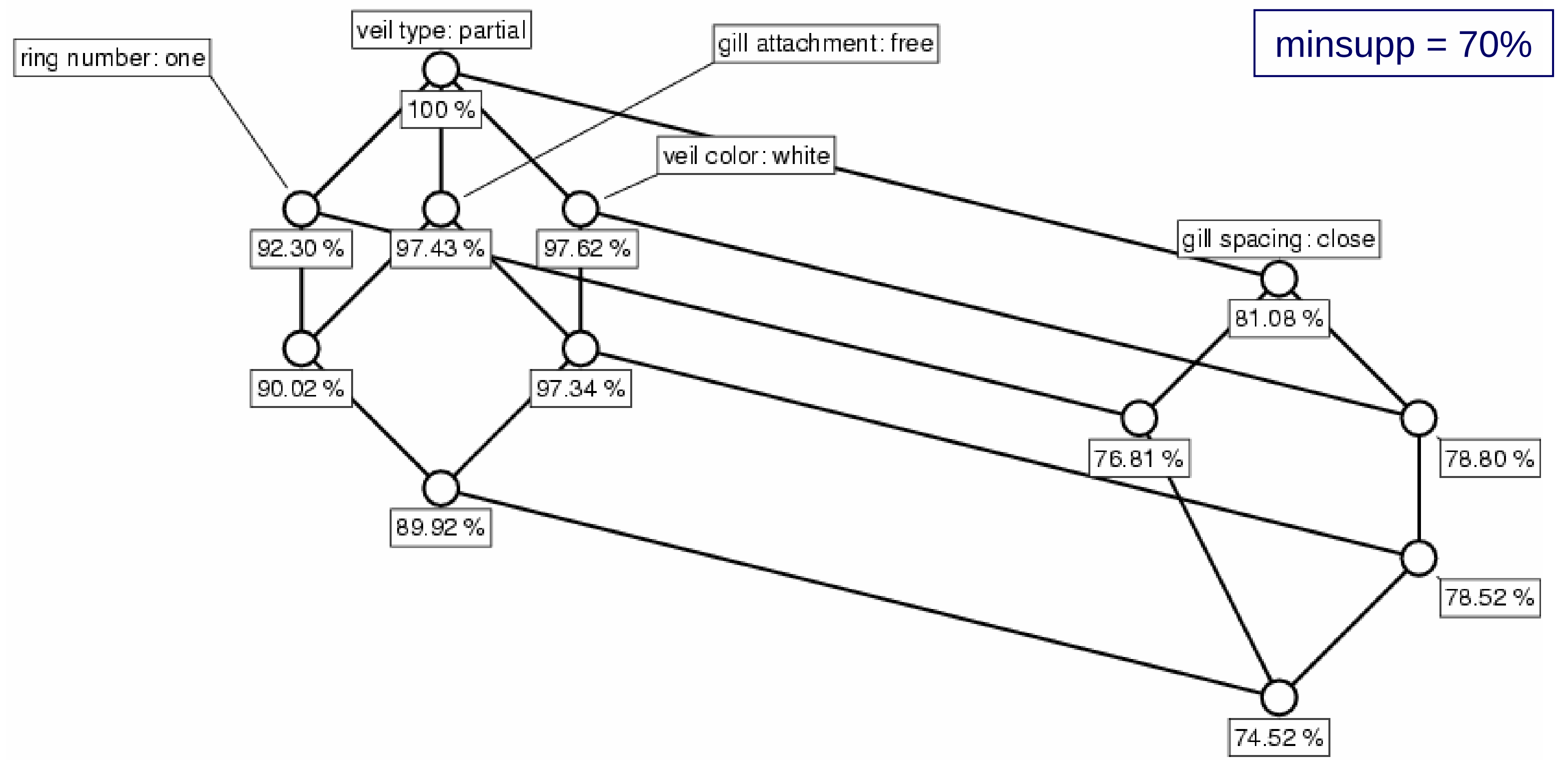
• From *B*‘ = *B*‘‘‘ follows

$$\mathrm{supp}(B) = \frac{|B'|}{|G|} = \frac{|B'''|}{|G|} = \mathrm{supp}(B'')$$

**Theorem:** $X \rightarrow Y$ and $X'' \rightarrow Y''$ have the same support and the same confidence.

Hence for computing association rules, it is sufficient to compute the supports of all frequent sets with $B = B''$ (i.e., the intents of the iceberg concept lattice).

# Advantage of the use of iceberg concept lattices (compared to frequent itemsets)



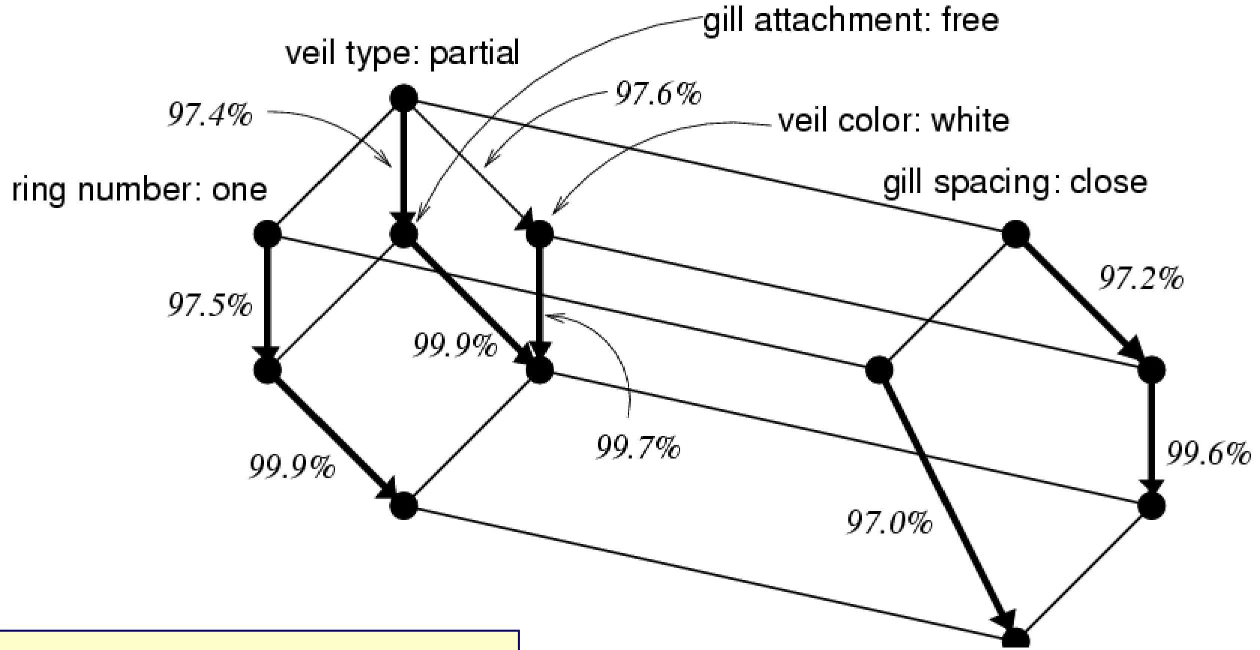

minsupp = 70%

32 frequent itemsets are represented by 12 frequent concept intents

→ **more efficient computation (e.g. TITANIC)**

→ **fewer rules (without information loss!)**

## Advantage of the use of iceberg concept lattices (compared to frequent itemsets)



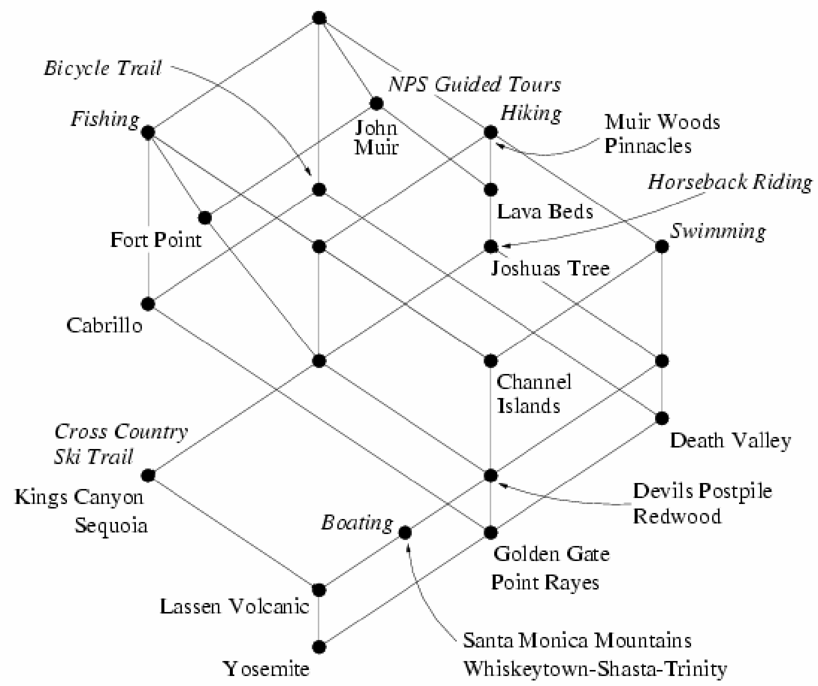

Association rules can be visualized in the iceberg concept lattice:

- **exact rules**
- **approximate rules**

conf = 100 %

conf < 100 %

# Wdh.: Exakte Assoziationsregeln




In concept lattices, they can be directly read from the diagram:

- **Lemma:** An implication $X \to Y$ holds iff the largest concept which is below all concepts generated by the attributes in $X$ is below all concepts generated by attributes in $Y$.

**Examples:**

- { Swimming } $\to$ { Hiking }

  (supp=10/19 $\approx$ 52.6%, conf = 100%)

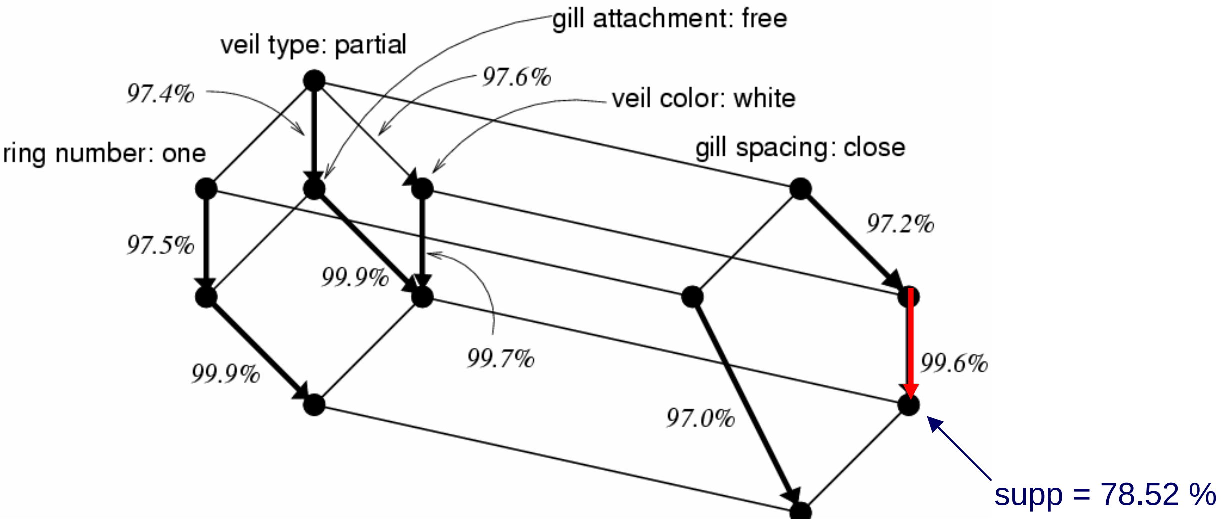
- { Boating } $\to$ { Swimming, Hiking, NPS Guided Tours, Fishing }

  (supp=4/19 $\approx$ 21.0%, conf = 100%)

- { Bicycle Trail, NPS Guided Tours } $\to$ { Swimming, Hiking } (supp=4/19 $\approx$ 21.0%, conf = 100%)

# Approximate Association Rules

**Def.:** The **Luxenburger basis** consists of all valid association rules $X \rightarrow Y$ such that there are concepts $(A_1, B_1)$ and $(A_2, B_2)$ where $(A_1, B_1)$ is a direct upper neighbor of $(A_2, B_2)$, $X = B_1$, and $X \cup Y = B_2$.

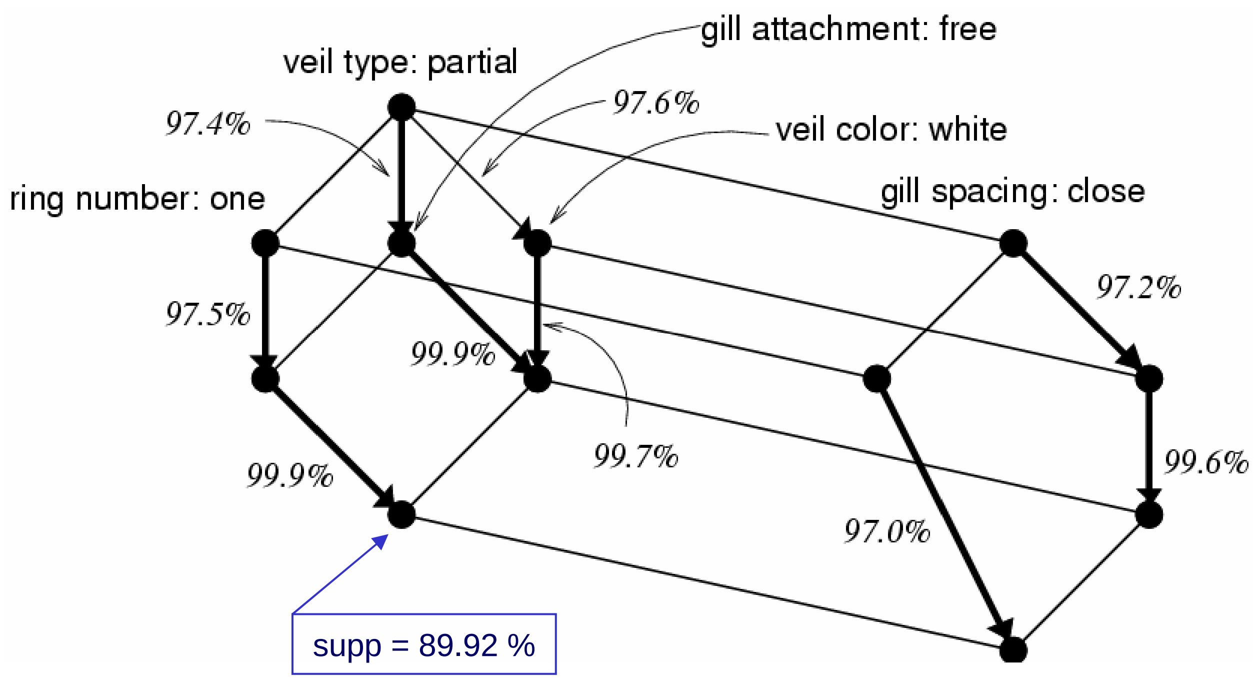



Each arrow indicates a rule of the basis, e.g. the rightmost arrow stands for { veil type: partial, gill spacing: close, veil color: white } $\rightarrow$ { gill attachment: free } (conf = 99.6 %, supp = 78.52 %)

**Theorem:** From the Luxenburger-Basis all approximate rules (incl. support und confidence) can be derived with the following rules:

- $\phi(X \to Y) = (X \to Y \setminus Z)$, für $\phi \in \{$ conf, supp $\}$, $Z \subseteq X$
- $\phi(X'' \to Y'') = \phi(X \to Y)$
- $\mathrm{conf}(X \to X) = 1$
- $\mathrm{conf}(X \to Y) = p$, $\mathrm{conf}(Y \to Z) = q \Rightarrow \mathrm{conf}(X \to Z) = p \cdot q$
  for all frequent concept intents $X \subset Y \subset Z$.
- $\mathrm{supp}(X \to Z) = \mathrm{supp}(Y \to Z)$, for all $X, Y \subseteq Z$.

The basis is minimal with this property.




## Example:

{ ring number: one } → { veil color: white }

- has support 89.92 % (the support of the largest concept having both attributes in its intent)
- and confidence 97.5 % × 99.9 % ≈ 97.4 %.

| Name | Number of objects | Average size of objects | Number of items |
|---|---|---|---|
| T10I4D100K | 100,000 | 10 | 1,000 |
| MUSHROOMS | 8,416 | 23 | 127 |
| C20D10K | 10,000 | 20 | 386 |
| C73D10K | 10,000 | 73 | 2,177 |

## Some experimental results

| Dataset (Minsupp) | Exact rules | D.-G. basis | Minconf | Approximate rules | Luxenburger basis |
|---|---|---|---|---|---|
| T10I4D100K (0.5%) | 0 | 0 | 90% | 16,269 | 3,511 |
| | | | 70% | 20,419 | 4,004 |
| | | | 50% | 21,686 | 4,191 |
| | | | 30% | 22,952 | 4,519 |
| MUSHROOMS (30%) | 7,476 | 69 | 90% | 12,911 | 563 |
| | | | 70% | 37,671 | 968 |
| | | | 50% | 56,703 | 1,169 |
| | | | 30% | 71,412 | 1,260 |
| C20D10K (50%) | 2,277 | 11 | 90% | 36,012 | 1,379 |
| | | | 70% | 89,601 | 1,948 |
| | | | 50% | 116,791 | 1,948 |
| | | | 30% | 116,791 | 1,948 |
| C73D10K (90%) | 52,035 | 15 | 95% | 1,606,726 | 4,052 |
| | | | 90% | 2,053,896 | 4,089 |
| | | | 85% | 2,053,936 | 4,089 |
| | | | 80% | 2,053,936 | 4,089 |

minimale Anzahl von exakten Regeln, aus denen alle abgeleitet werden können.

# TITANIC

Only concepts with a support above a threshold minsupp $\in$ [0,1].

TITANIC computes the set of all (frequent) concept intents using the *support function*:

**Def.:** The **support** of an attribute set (itemset) $X \subseteq M$ is given by

$$\mathrm{supp}(X) = \frac{|X'|}{|G|}$$

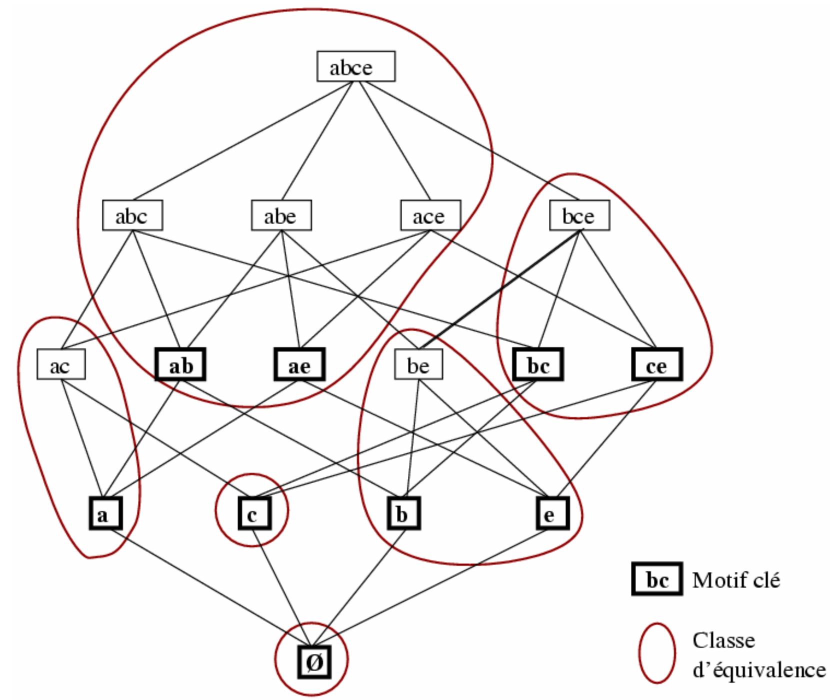
# TITANIC

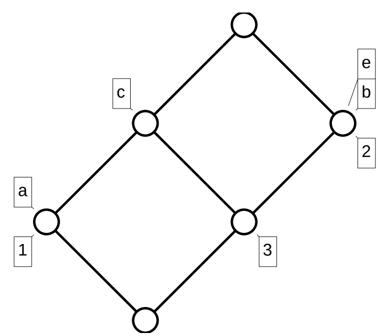
| | a | b | c | e |
|---|---|---|---|---|
| 1 | × | | × | |
| 2 | | × | | × |
| 3 | | × | × | × |

• Alle Itemsets in einer Äquivalenzklasse haben denselben Support
(da sie in denselben Transaktionen enthalten sind).

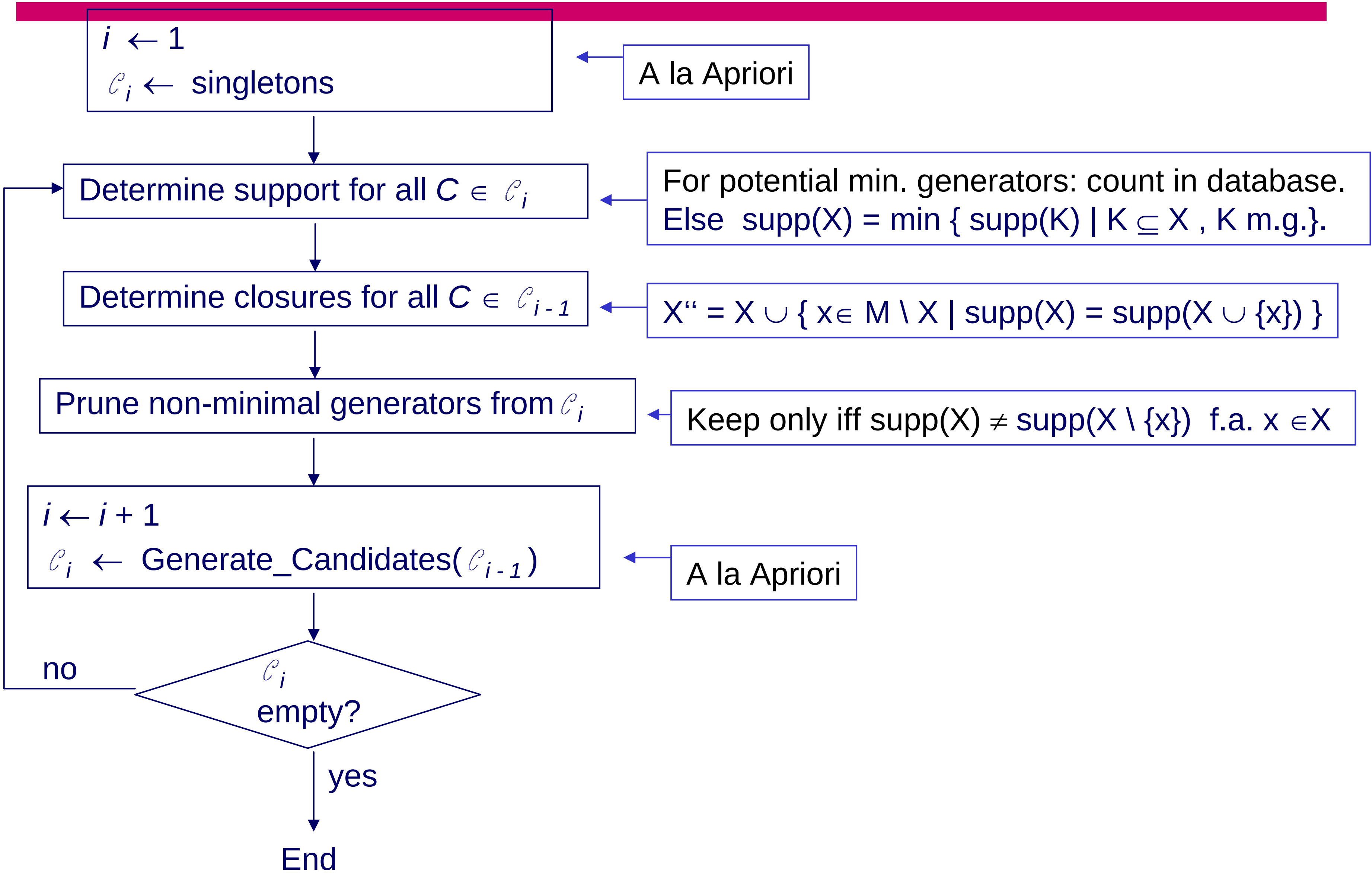
• Für die Berechnung fassen wir nur die kleinsten Elemente einer Klasse an, die sogen. minimalen Erzeuger
(die dicken schwarzen Kästen). Sie haben die selbe Monotonie-Eigenschaft wie häufige Itemsets.

• Für die Regeln verwenden wir nur die Begriffsinhalte
(die größten Elemente jeder Äquivalenzklasse, die wir aus einem minimalen Erzeuger X durch
X“ = X ∪ { x ∈ M \ X | supp(X) = supp(X ∪ { x }) }
erhalten).



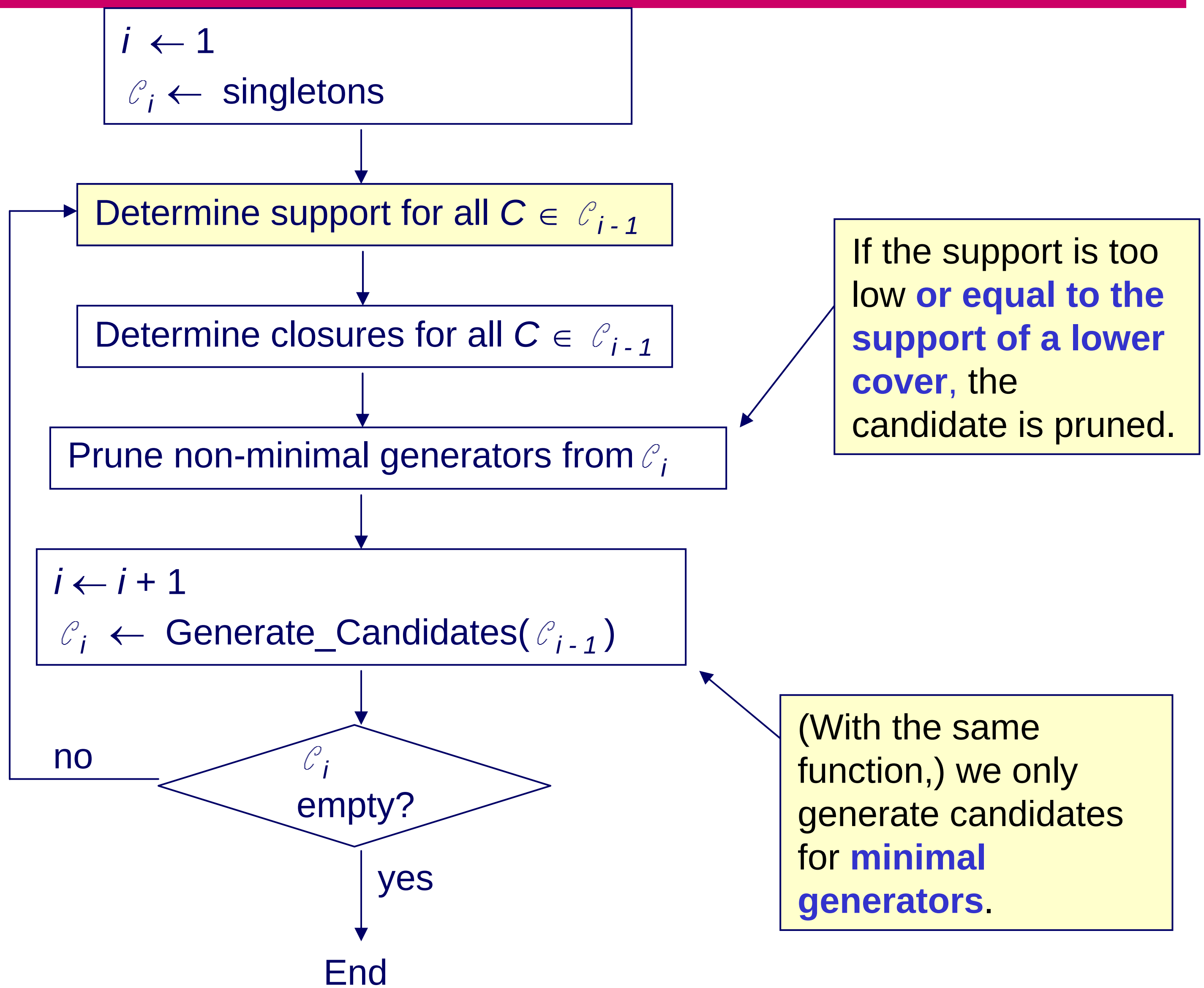



# TITANIC


$i \leftarrow 1$
$\mathcal{C}_i \leftarrow$ singletons
A la Apriori
Determine support for all $C \in \mathcal{C}_i$
For potential min. generators: count in database.
Else supp(X) = min { supp(K) | K $\subseteq$ X , K m.g.}.
Determine closures for all $C \in \mathcal{C}_{i-1}$
X'' = X $\cup$ { x$\in$ M \ X | supp(X) = supp(X $\cup$ {x}) }
Prune non-minimal generators from $\mathcal{C}_i$
Keep only iff supp(X) $\neq$ supp(X \ {x}) f.a. x $\in$X
$i \leftarrow i + 1$
$\mathcal{C}_i \leftarrow$ Generate_Candidates($\mathcal{C}_{i-1}$)
A la Apriori
no
$\mathcal{C}_i$ empty?
yes
End

# TITANIC

Differences to Apriori



# Mehrwertige Kontexte und Skalierung

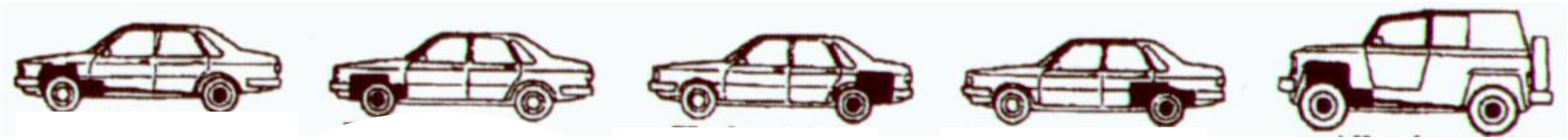
Dieser Abschnitt ersetzt die quantitativen Assoziationsregeln. Skalierung kann auch als eine Methode der Datenvorverarbeitung verstanden werden.

**Def.:** Ein **mehrwertiger Kontext** (G, M, W, I) besteht aus den Mengen G, M und W und einer dreistelligen Relation I zwischen G, M und W (d.h. $I \subseteq G \times M \times W$), wobei gilt:

aus $(g, m, w) \in I$ und $(g, m, v) \in I$ folgt stets $w = v$.

Die Elemente von G nennen wir die **Gegenstände**, die von M die (**mehrwertigen**) **Merkmale** und die von W die **Merkmalsausprägungen** oder Werte. $(g, m, w) \in I$ lesen wir als „ das Merkmal m hat beim Gegenstand g den Wert w “.

**Bsp.:** Der mehrwertige Kontext enthält einen Vergleich der verschiedenen Möglichkeiten, Motor und Antrieb eines PKW anzuordnen.



**Standardantrieb** **Frontantrieb** **Heckantrieb** **Mittelmotor mit Heckantrieb** **Allradantrieb**

| | Au | Ab | F | E | R | B | W |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Standard | schlecht | gut | gut | untersteuernd | gut | mittel | sehr gut |
| Front | gut | schlecht | sehr gut | untersteuernd | sehr gut | sehr gering | gut |
| Heck | sehr gut | sehr gut | sehr schlecht | übersteuernd | schlecht | gering | sehr schlecht |
| Mittel | sehr gut | sehr gut | gut | neutral | sehr schlecht | gering | sehr schlecht |
| Allrad | sehr gut | sehr gut | gut | unterst./neutral | gut | hoch | schlecht |

Au := Antriebswirkung unbeladen; Ab := Antriebswirkung beladen; F := Fahrstabilität; E := Eigenlenkverhalten; R := Raumausnutzung; B := Bauaufwand; W := Wartungfreundlichkeit.

[Antriebskonzept für Personenkraftwagen. Quelle: Schlag nach! 100 000 Tatsachen aus allen Wissenschaftsgebieten. BI-Verlag Mannheim, 1982]

# Begriffliche Skalierung

= Umwandlung eines mehrwertigen Kontexts in einen einwertigen.

Zur Skalierung wird zunächst jedes Merkmal eines mehrwertigen Kontextes durch einen Kontext interpretiert, dieser wird *begriffliche Skala* genannt:

**Def.:** Eine **Skala** zum Merkmal m eines mehrwertigen Kontextes ist ein (einwertiger) Kontext $S_m := (G_m, M_m, I_m)$ mit $m(G) \subseteq G_m$. Die Gegenstände einer Skala nennen wir **Skalenwerte**, die Merkmale **Skalenmerkmale**.

**Bem.:** Jeder Kontext kann als Skala verwendet werden Einige besonders einfache Kontexte werden immer wieder als Skalen benutzt.

**Bsp.:** Der folgende einwertige Kontext ergibt sich als der abgeleitete Kontext zu dem oben angegebenen mehrwertigen Kontext, wenn folgende Skalen benutzt werden:

$\mathbb{S}_{Au} := \mathbb{S}_{Ab} :=$

| | ++ | + | − |
|---|---|---|---|
| ++ | × | × | |
| + | | × | |
| − | | | × |

$\mathbb{S}_{F} :=$

| | ++ | + | −− |
|---|---|---|---|
| ++ | × | × | |
| + | | × | |
| −− | | | × |

$\mathbb{S}_{E} :=$

| | u | ü | n | u/n |
|---|---|---|---|---|
| u | × | | | |
| ü | | × | | |
| n | | | × | |
| u/n | | | | × |

$\mathbb{S}_{R} := \mathbb{S}_{W} :=$

| | ++ | + | − | −− |
|---|---|---|---|---|
| ++ | × | × | | |
| + | | × | | |
| − | | | × | |
| −− | | | × | × |

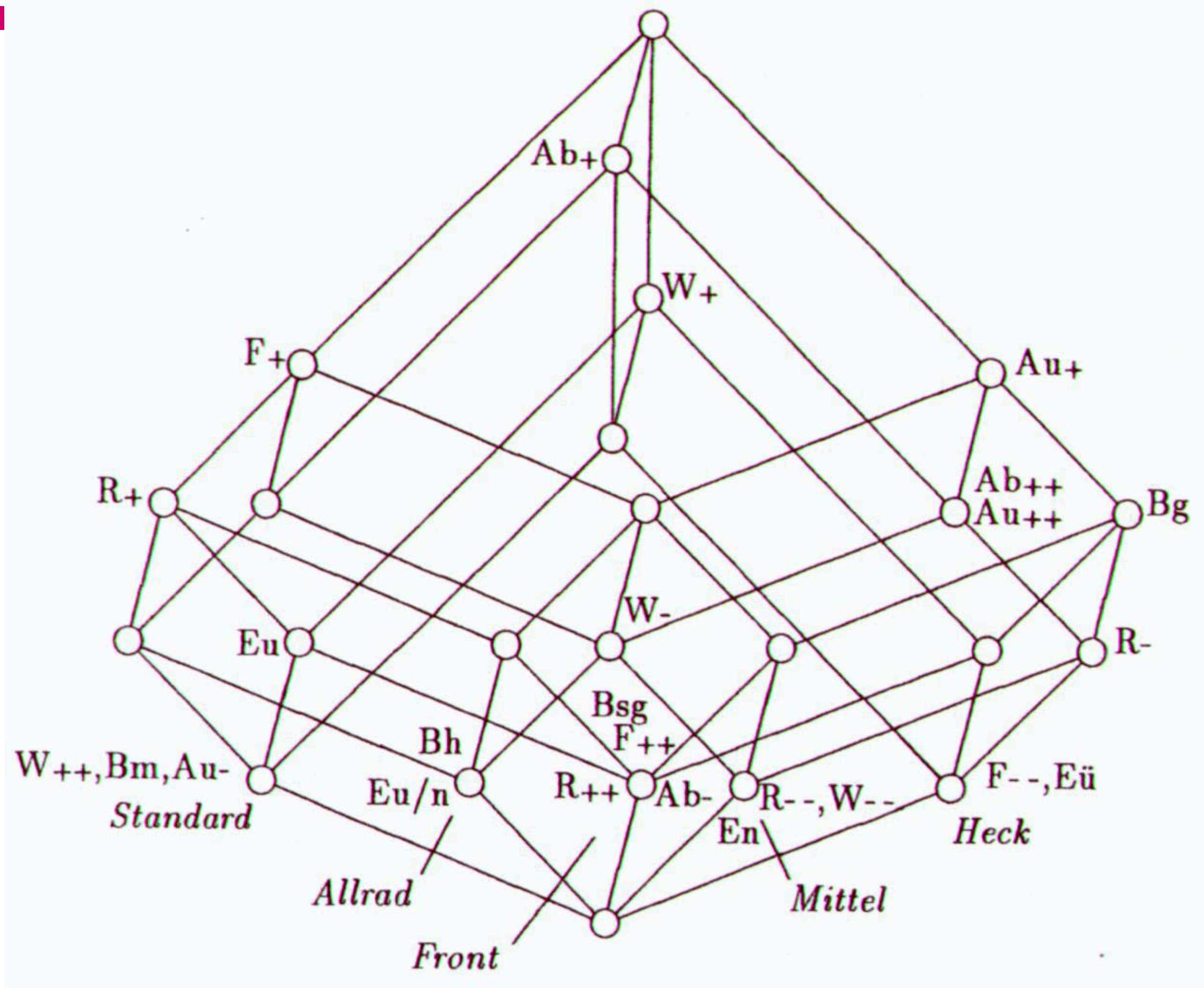
$\mathbb{S}_{B} :=$

| | sg | g | m | h |
|---|---|---|---|---|
| sg | × | × | | |
| g | | × | | |
| m | | | × | |
| h | | | | × |

| | Au | | | Ab | | | F | | | E | | | | R | | | | B | | | | W | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ++ | + | − | ++ | + | − | ++ | + | − − | u | ü | n | u/n | ++ | + | − | − − | sg | g | m | h | ++ | + | − | − − |
| Standard | | | × | | × | | | × | | × | | | | | × | | | | | × | | × | × | | |
| Front | | × | | | | × | × | × | | × | | | | × | × | | | × | × | | | | × | | |
| Heck | × | × | | × | × | | | | × | | × | | | | | × | | | × | | | | × | | |
| Mittel | × | × | | × | × | | | × | | | | × | | | | × | × | | × | | | | | × | × |
| Allrad | × | × | | × | × | | | × | | | | | × | | × | | | | | | × | | | × | |

Au := Antriebswirkung unbeladen; Ab := Antriebswirkung beladen; F := Fahrstabilität; E := Eigenlenkverhalten; R := Raumausnutzung; B := Bauaufwand; W := Wartungfreundlichkeit.
++ := sehr gut; + := gut; - := schlecht; -- := sehr schlecht; u := untersteuernd; Ü := übersteuernd; n := neutral; sg := sehr gering; g := gering; m := mittel; h := hoch.

Hätten wir für die Merkmale *Au*, *Ab* und *F* ebenfalls die Skalen $S_R$ verwendet, wäre der abgeleitete Kontext nur unwesentlich anders ausgefallen.




Begriffsverband zum Kontext der Antriebskonzepte

Bei der **begrifflichen Skalierung** erhält man aus dem mehrwertigen Kontext (G, M, W, I) und den Skalenkontexten $S_m$, $m \in M$, den abgeleiteten einwertigen Kontext wie folgt:

Die Gegenstandsmenge G bleibt unverändert, jedes mehrwertige Merkmal m wird ersetzt durch die Skalenmerkmale der Skala $S_{m.}$ Denkt man sich einen mehrwertigen Kontext durch eine Tabelle dargestellt, so kann man sich die schlichte Skalierung folgendermaßen veranschaulichen: Jede Merkmalsausprägung m(g) wird ersetzt durch die zu m(g) gehörige Zeile des Skalenkontextes $S_m$.

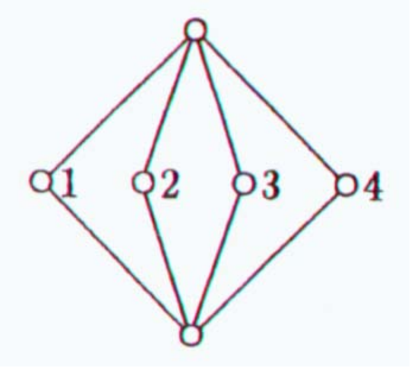
**Def.: Elementarskalen**

**Nominalskalen** $\mathbf{N}_n := (\mathbf{n}, \mathbf{n}, =)$

Nominalskalen werden zur Skalierung von Merkmalen verwendet, deren Ausprägung sich gegenseitig ausschließen. Es ergibt sich eine Partition der Gegenstände in Begriffsumfänge.

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | x | | | |
| 2 | | x | | |
| 3 | | | x | |
| 4 | | | | x |

Die Nominalskala $\mathbf{N}_4$

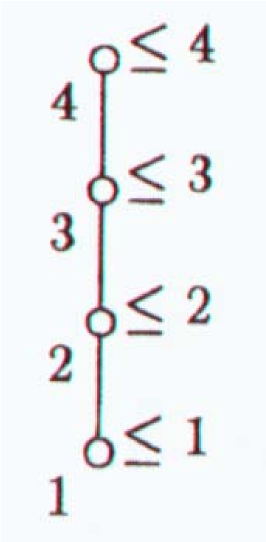


**Ordinalskalen** $\mathbf{O_n} := (\mathbf{n}, \mathbf{n}, \leq)$

Ordinalskalen skalieren mehrwertige Merkmale, deren Ausprägungen geordnet sind und bei denen jede Merkmalsausprägung die jeweils schwächeren impliziert. Hat ein Merkmal z.B. die Ausprägungen { *laut, sehr laut, extrem laut* }, so liegt es nahe, es ordinal zu skalieren. Die Merkmalsausprägungen bewirken dann eine Kette von Begriffsumfängen, die als *Rangordnung* gedeutet werden kann.

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | x | x | x | x |
| 2 | | x | x | x |
| 3 | | | x | x |
| 4 | | | | x |

Die Ordinalskala $O_4$



**Interordinalskalen** **$\mathbb{I}_n := (n, n, \leq) \mid (n, n, \geq)$**

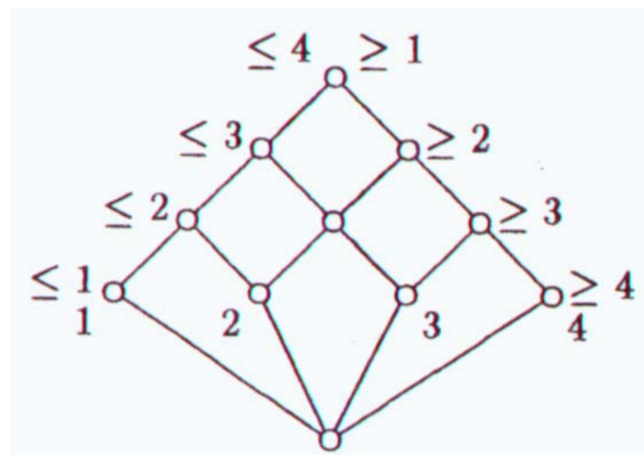
Die Begriffsumfänge der Interordinalskala sind genau die Intervalle von Ausprägungen.

Anwendungen:

- numerische Merkmale
- Gegensatzpaare (*aktiv*-*passiv*, *redselig*-*wortkarg* usw.) in Fragebögen mit Zwischenwerten.

$\mathbb{I}_4 =$

| | $\leq 1$ | $\leq 2$ | $\leq 3$ | $\leq 4$ | $\geq 1$ | $\geq 2$ | $\geq 3$ | $\geq 4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | × | × | × | × | × | | | |
| 2 | | × | × | × | × | × | | |
| 3 | | | × | × | × | × | × | |
| 4 | | | | × | × | × | × | × |

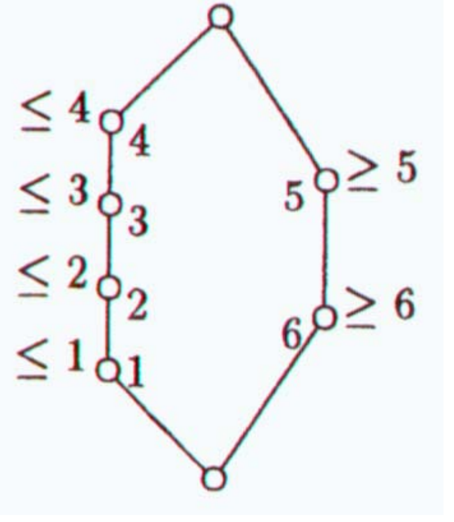


Bipolare Merkmale können aber oft auch treffend biordinal skaliert werden:

**Biordinalskalen** $\mathbf{M}_{n,m} := (\mathbf{n}, \mathbf{n}, \leq) \cup (\mathbf{m}, \mathbf{m}, \geq)$
Im Sprachgebrauch verwenden wir Gegensatzpaare häufig nicht am Sinne der Interordinalskala, sondern einfacher: jedem Gegenstand wird einer der beiden Pole zugeordnet, wobei noch abgestuft werden kann. Die Ausprägungen { *sehr leise, leise, laut, sehr laut* } legen z.B. eine solche Skalierung nahe: laut und leise schließen sich aus, sehr laut impliziert laut, sehr leise impliziert leise. Eine entsprechende *Partition mit Rangordnung* hat man in den Namen der Schulnoten: Eine sehr gute Leistung ist natürlich auch gut, befriedigend und ausreichend, aber nicht mangelhaft oder ungenügend.

$\mathbb{M}_{4,2} =$

| | $\leq 1$ | $\leq 2$ | $\leq 3$ | $\leq 4$ | $\geq 5$ | $\geq 6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | × | × | × | × | | |
| 2 | | × | × | × | | |
| 3 | | | × | × | | |
| 4 | | | | × | | |
| 5 | | | | | × | |
| 6 | | | | | × | × |



Die **dichotome Skala** D := ({0, 1}, {0,1}, =)
wird häufig benutzt, um Merkmale mit { ja, nein } -Ausprägungen zu skalieren.

| | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | x | |
| 1 | | x |

**Bem.:**

- Auf dem skalierten Kontext können nun natürlich wieder Assoziationsregeln berechnet werden.
- Wurden numerische Merkmale interordinal skaliert, so ergeben sich daraus sogen. ‚quantitative Assoziationsregeln'.