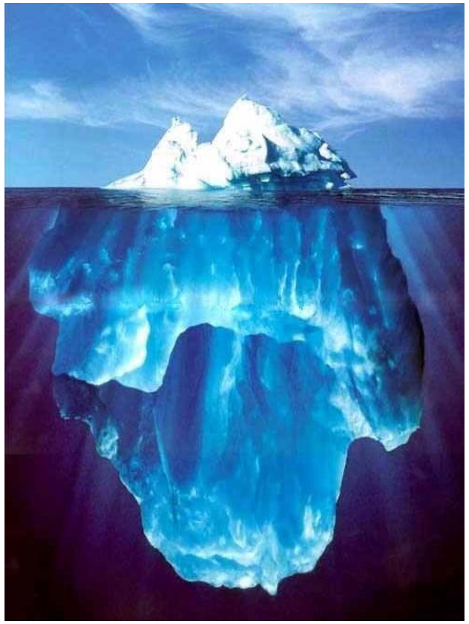
# Formale Begriffsanalyse

I Kontexte, Begriffe und Begriffsverbände

3 Mehrwertige Kontexte und Begriffliches Skalieren



## 3 Mehrwertige Kontexte und Skalierung

Umgangssprachlich wird das Wort „Merkmal“ nicht nur für Eigenschaften verwendet, die ein Gegenstand haben kann oder nicht haben kann: Merkmale wie „Farbe“, „Gewicht“, „Geschlecht“, „Note“ haben *Ausprägungen* oder *Werte*. Wir bezeichnen sie als *mehrwertige Merkmale*, im Unterschied zu den bisher betrachteten *einwertigen Merkmalen*. (In DIN 2330 heißen die mehrwertigen Merkmale *Merkmalarten*.)

**Def.:** Ein **mehrwertiger Kontext** $(G, M, W, I)$ besteht aus den Mengen $G$, $M$ und $W$ und einer dreistelligen Relation $I$ zwischen $G$, $M$ und $W$ (d.h. $I \subseteq G \times M \times W$), wobei gilt:

aus $(g, m, w) \in I$ und $(g, m, v) \in I$ folgt stets $w = v$.



Die Elemente von $G$ nennen wir die **Gegenstände**, die von $M$ die (**mehrwertigen**) **Merkmale** und die von $W$ die **Merkmalsausprägungen** oder Werte. $(g, m, w) \in I$ lesen wir als „ das Merkmal $m$ hat beim Gegenstand $g$ den Wert $w$ “. Die mehrwertigen Mermale können als partielle Abbildungen aus $G$ in $W$ verstanden werden, dies legt es nahe, $m(g) = w$ statt $(g, m, w) \in I$ zu schreiben. Der **Definitionsbereich** eines Merkmals $m$ wird definiert als

$$\mathrm{dom}(m) := \{g \in G \mid (g, m, w) \in I \text{ für } w \in W\}.$$

Das Merkmal $m$ heißt vollständig, falls $\mathrm{dom}(m) = G$ ist, ein mehrwertiger Kontext heißt vollständig, falls alle Merkmale vollständig sind.



Wie die bisher behandelten einwertigen Kontexte können mehrwertige Kontexte durch Tabellen dargestellt werden, bei denen die Zeilen mit den Gegenständen und die Spalten mit den Merkmalen benannt sind. Der Eintrag in Zeile $g$ und Spalte $m$ ist dann die Merkmalsausprägung $m(g)$. Hat das Merkmal $m$ keine Ausprägung beim Gegenstand $g$, so wird auch nichts eingetragen.

**Bsp.:** Der mehrwertige Kontext enthält einen Vergleich der verschiedenen Möglichkeiten, Motor und Antrieb eines PKW anzuordnen.


| | Au | Ab | F | E | R | B | W |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Standard | schlecht | gut | gut | untersteuernd | gut | mittel | sehr gut |
| Front | gut | schlecht | sehr gut | untersteuernd | sehr gut | sehr gering | gut |
| Heck | sehr gut | sehr gut | sehr schlecht | übersteuernd | schlecht | gering | sehr schlecht |
| Mittel | sehr gut | sehr gut | gut | neutral | sehr schlecht | gering | sehr schlecht |
| Allrad | sehr gut | sehr gut | gut | unterst./neutral | gut | hoch | schlecht |

Au := Antriebswirkung unbeladen; Ab := Antriebswirkung beladen; F := Fahrstabilität; E := Eigenlenkverhalten; R := Raumausnutzung; B := Bauaufwand; W := Wartungfreundlichkeit.

Antriebskonzept für Personenkraftwagen. Quelle: Schlag nach! 100 000 Tatsachen aus allen Wissenschaftsgebieten. BI-Verlag Mannheim, 1982



Wie kann man einem mehrwertigen Kontext Begriffe zuordnen? Wir tun dies auf folgende Weise: Der mehrwertige Kontext wird in einen einwertigen verwandelt, nach Regeln, die wir unten erklären. Die Begriffe dieses abgeleiteten einwertigen Kontextes werden dann als Begriffe des mehrwertigen Kontextes gedeutet. Dieser Interpretationsvorgang, **begriffliche Skalierung** genannt, ist aber keineswegs eindeutig, das Begriffssystem eines mehrwertigen Kontextes hängt also von der Skalierung ab. Das kann zunächst verwirren, es erweist sich aber als ein vorzügliches Instrument zur zweckgerichteten Auswertung von Daten.

Zur Skalierung wird zunächst jedes Merkmal eines mehrwertigen Kontextes durch einen Kontext interpretiert, dieser wird *begriffliche Skala* genannt.



**Def.:** Eine **Skala** zum Merkmal m eines mehrwertigen Kontextes ist ein (einwertiger) Kontext $S_m := (G_m, M_m, I_m)$ mit $m(G) \subseteq G_m$. Die Gegenstände einer Skala nennen wir **Skalenwerte**, die Merkmale **Skalenmerkmale**.

Jeder Kontext kann als Skala verwendet werden, formal besteht zwischen Skala und Kontext kein Unterschied. Wir wollen die Bezeichnung „Skala“ aber nur für solche Kontexte verwenden, die eine klare begriffliche Struktur haben und die Bedeutung tragen. Einige besonders einfache Kontexte werden immer wieder als Skalen benutzt.



**Bsp.:** Der folgende einwertige Kontext ergibt sich als der abgeleitete Kontext zu dem oben angegebenen mehrwertigen Kontext, wenn folgende Skalen benutzt werden:

$\mathbb{S}_{Au} := \mathbb{S}_{Ab} :=$

| | ++ | + | − |
|---|---|---|---|
| ++ | × | × | |
| + | | × | |
| − | | | × |

$\mathbb{S}_{F} :=$

| | ++ | + | −− |
|---|---|---|---|
| ++ | × | × | |
| + | | × | |
| −− | | | × |

$\mathbb{S}_{E} :=$

| | u | ü | n | u/n |
|---|---|---|---|---|
| u | × | | | |
| ü | | × | | |
| n | | | × | |
| u/n | | | | × |

$\mathbb{S}_{R} := \mathbb{S}_{W} :=$

| | ++ | + | − | −− |
|---|---|---|---|---|
| ++ | × | × | | |
| + | | × | | |
| − | | | × | |
| −− | | | × | × |

$\mathbb{S}_{B} :=$

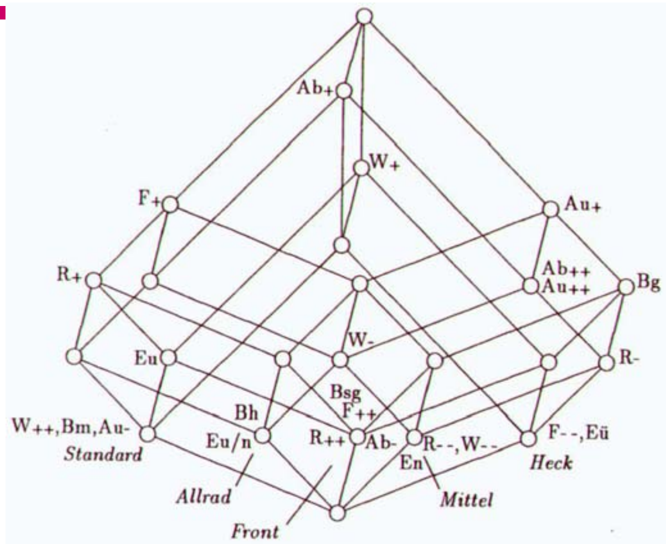
| | sg | g | m | h |
|---|---|---|---|---|
| sg | × | × | | |
| g | | × | | |
| m | | | × | |
| h | | | | × |

| | Au | | | Ab | | | F | | | E | | | | R | | | | B | | | | W | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ++ | + | − | ++ | + | − | ++ | + | − − | u | ü | n | u/n | ++ | + | − | − − | sg | g | m | h | ++ | + | − | − − |
| Standard | | | × | | × | | | × | | × | | | | | × | | | | | × | | × | × | | |
| Front | | × | | | | × | × | × | | × | | | | × | × | | | × | × | | | | × | | |
| Heck | × | × | | × | × | | | | × | | × | | | | | × | | | × | | | | × | | |
| Mittel | × | × | | × | × | | | × | | | | × | | | | × | × | | × | | | | | × | × |
| Allrad | × | × | | × | × | | | × | | | | | × | | × | | | | | | × | | | × | |

Au := Antriebswirkung unbeladen; Ab := Antriebswirkung beladen; F := Fahrstabilität; E := Eigenlenkverhalten; R := Raumausnutzung; B := Bauaufwand; W := Wartungfreundlichkeit.
++ := sehr gut; + := gut; - := schlecht; -- := sehr schlecht; u := untersteuernd; Ü := übersteuernd; n := neutral; sg := sehr gering; g := gering; m := mittel; h := hoch.

Hätten wir für die Merkmale *Au*, *Ab* und *F* ebenfalls die Skalen $S_R$ verwendet, wäre der abgeleitete Kontext nur unwesentlich anders ausgefallen.






Begriffsverband zum Kontext der Antriebskonzepte



Bei der **schlichten Skalierung** erhält man aus dem mehrwertigen Kontext (G, M, W, I) und den Skalenkontexten $S_m$, $m \in M$, den abgeleiteten einwertigen Kontext wie folgt:

Die Gegenstandsmenge G bleibt unverändert, jedes mehrwertige Merkmal m wird ersetzt durch die Skalenmerkmale der Skala $S_{m.}$ Denkt man sich einen mehrwertigen Kontext durch eine Tabelle dargestellt, so kann man sich die schlichte Skalierung folgendermaßen veranschaulichen: Jede Merkmalsausprägung m(g) wird ersetzt durch die zu m(g) gehörige Zeile des Skalenkontextes $S_m$.

Die genaue Beschreibung erfährt man in der folgenden Definition, für die wir noch eine Abkürzung benötigen: Die Merkmalmenge des abgeleiteten Kontextes ist die disjunkte Vereinigung der Merkmalmengen der beteiligten Skalen. Um sicherzustellen, dass die Mengen disjunkt sind, ersetzt man die Merkmalmenge der Skala $S_m$ durch

$$M_m := \{m\} \times M_m.$$



**Def.:** Ist (G, M, W, I) ein mehrwertiger Kontext und sind $S_m$, $m \in M$, Skalenkontexte, so ist der abgeleitete Kontext bezüglich der schlichten Skalierung der Kontext (G, N, J) mit

$$N := \bigcup_{m \in M} M_m,$$

und

$$gJ(m, n) :\Leftrightarrow m(g) = w \text{ und } wI_m n.$$

Die formale Definition des Kontextes erlaubt es, Relationen aus beliebigen Zusammenhängen zu Kontexten zu machen und ihre Begriffsverbände zu untersuchen, also auch solche, bei denen eine Interpretation der Mengen G und M als „Gegenstände“ bzw. „Merkmale“ künstlich erscheint.

Das ist bei vielen aus der Mathematik stammenden Kontexten so, und man bekommt auf diese Weise Begriffsverbände, die oft strukturelle Eigenschaften haben, welche bei empirischen Datensätzen höchst selten auftreten.

Dennoch sind diese Kontexte auch für die Datenanalyse von großer Bedeutung, sie eignen sich z.B. als „Idealstrukturen“ oder als Skalen für die oben eingeführte Skalierung.
Die am weitaus häufigsten verwendeten, die Elementarskalen, stellen wir nun vor.

Wir verwenden die Abkürzung **n** := {1, ..., n}.

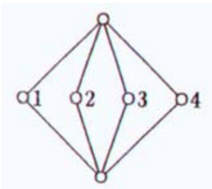


**Def.: Elementarskalen**

**Nominalskalen** $\mathbf{N_n} := (\mathbf{n}, \mathbf{n}, =)$
Nominalskalen werden zur Skalierung von Merkmalen verwendet, deren Ausprägung sich gegenseitig ausschließen. Hat ein Merkmal z.B. die Werte {männlich, weiblich, sächlich}, so liegt es nahe, es nominal zu skalieren. Es ergibt sich dadurch eine Partition der Gegenstände in Begriffsumfänge. Die Klassen entsprechen dabei den Ausprägungen des Merkmals.

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | x | | | |
| 2 | | x | | |
| 3 | | | x | |
| 4 | | | | x |

Die Nominalskala $\mathbf{N_4}$

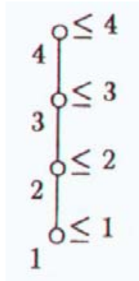





**Ordinalskalen** $\mathbf{O_n} := (\mathbf{n}, \mathbf{n}, \leq)$
Ordinalskalen skalieren mehrwertige Merkmale, deren Ausprägungen geordnet sind und bei denen jede Merkmalsausprägung die jeweils schwächeren impliziert. Hat ein Merkmal z.B. die Ausprägungen { *laut, sehr laut, extrem laut* }, so liegt es nahe, es ordinal zu skalieren. Die Merkmalsausprägungen bewirken dann eine Kette von Begriffsumfängen, die als *Rangordnung* gedeutet werden kann.

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | x | x | x | x |
| 2 | | x | x | x |
| 3 | | | x | x |
| 4 | | | | x |

Die Ordinalskala $O_4$

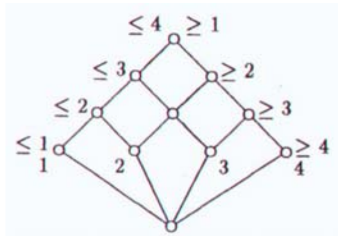





**Interordinalskalen** $\mathbf{I_n} := (\mathbf{n}, \mathbf{n}, \leq) \mid (\mathbf{n}, \mathbf{n}, \geq)$
In Fragebögen werden als Antwortmöglichkeiten oft Gegensatzpaare angeboten wie *aktiv-passiv*, *redselig-wortkarg* usw., wobei man sich für Zwischenwerte entscheiden kann. Die Ausprägungen sind dann *bipolar* geordnet. Für solche Merkmale kann die Skalierung durch Interordinalskalen fruchtbar sein. Die Begriffsumfänge der Interordinalskala sind genau die Intervalle von Ausprägungen - auf diese Weise wird die *Zwischenbeziehung* begrifflich wiedergegeben.

$\mathbb{I}_4 =$

| | ≤ 1 | ≤ 2 | ≤ 3 | ≤ 4 | ≥ 1 | ≥ 2 | ≥ 3 | ≥ 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | × | × | × | × | × | | | |
| 2 | | × | × | × | × | × | | |
| 3 | | | × | × | × | × | × | |
| 4 | | | | × | × | × | × | × |

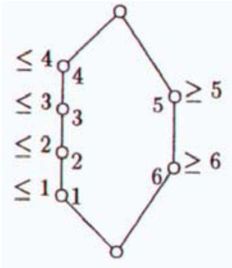


Bipolare Merkmale können aber oft auch treffend biordinal skaliert werden:

**Biordinalskalen** $\mathbb{M}_{n,m} := (n, n, \leq) \cup (m, m, \geq)$
Im Sprachgebrauch verwenden wir Gegensatzpaare häufig nicht am Sinne der Interordinalskala, sondern einfacher: jedem Gegenstand wird einer der beiden Pole zugeordnet, wobei noch abgestuft werden kann. Die Ausprägungen { *sehr leise, leise, laut, sehr laut* } legen z.B. eine solche Skalierung nahe: laut und leise schließen sich aus, sehr laut impliziert laut, sehr leise impliziert leise. Eine entsprechende *Partition mit Rangordnung* hat man in den Namen der Schulnoten: Eine sehr gute Leistung ist natürlich auch gut, befriedigend und ausreichend, aber nicht mangelhaft oder ungenügend.

$\mathbb{M}_{4,2} =$

| | $\leq 1$ | $\leq 2$ | $\leq 3$ | $\leq 4$ | $\geq 5$ | $\geq 6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | × | × | × | × | | |
| 2 | | × | × | × | | |
| 3 | | | × | × | | |
| 4 | | | | × | | |
| 5 | | | | | × | |
| 6 | | | | | × | × |






Die **dichotome Skala** $\mathbb{D} := (\{0, 1\}, \{0,1\}, =)$
Sie spielt eine Sonderrolle, denn sie ist zu den Skalen $\mathbb{N}_2$ und $\mathbb{M}_{1,1}$ isomorph und mit $\mathbb{I}_2$ eng verwandt. Sie wird häufig benutzt, um Merkmale mit { ja, nein } -Ausprägungen zu skalieren.

| | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | x | |
| 1 | | x |



Ein oft auftretender Spezialfall der schlichten Skalierung ist der, dass alle mehrwertigen Merkmale bezüglich der gleichen Skala oder Skalenfamilie interpretiert werden. So spricht man von einem nominal skalierten Kontext, wenn alle Skalen Nominalskalen sind, etc.

Wir nennen einen mehrwertigen Kontext nominal, wenn die Art der Daten eine nominale Skalierung naheliegt; von einem ordinalen Kontext spricht man bei einem mehrwertigen Kontext, wenn für jedes Merkmal die Menge der Ausprägungen auf natürliche Weise geordnet ist

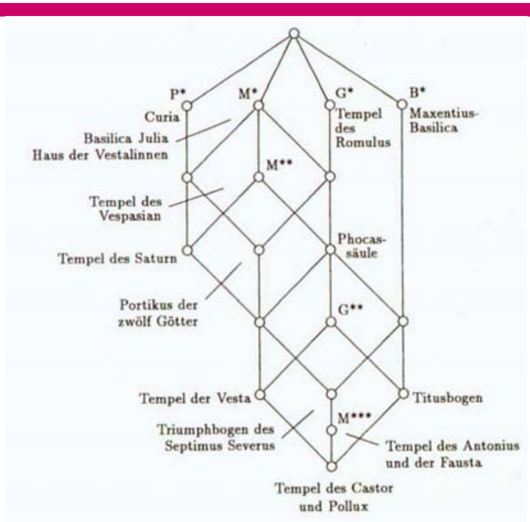


| | Forum Romanum | B | GB | M | P |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Triumphbogen des Septimus Severus | * | * | ** | * |
| 2 | Titusbogen | * | ** | ** | |
| 3 | Basilica Julia | | | * | |
| 4 | Maxentius-Basilica | * | | | |
| 5 | Phocassäule | | * | ** | |
| 6 | Curia | | | | * |
| 7 | Haus der Vestalinnen | | | * | |
| 8 | Portikus der zwölf Götter | | * | * | * |
| 9 | Tempel des Antonius und der Fausta | * | * | *** | * |
| 10 | Tempel des Castor und Pollux | * | ** | *** | * |
| 11 | Tempel des Romulus | | * | | |
| 12 | Tempel des Saturn | | | ** | * |
| 13 | Tempel des Vespasian | | | ** | |
| 14 | Tempel der Vesta | | ** | ** | * |

Beispiel eines ordinalen Kontextes: Bewertungen von Monumenten des Forum Romanum in verschiedenen Reiseführern (B = Baedecker, GB = Les Guides Bleus, M = Michelin, P = Polyglott). Ordinal wird der Kontext durch die Anzahl der jeweils vergebenen Sterne; ist kein Stern angegeben, so wird dies als Null gewertet.

| Forum Romanum | Baedecker | Les Guides Bleus | | Michelin | | | Polyglott |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ≥1 | ≥1 | ≥2 | ≥1 | ≥2 | ≥3 | ≥1 |
| Triumphbogen des Septimus Severus | × | × | | × | × | | × |
| Titusbogen | × | × | × | × | × | | |
| Basilica Julia | | | | × | | | |
| Maxentius-Basilica | × | | | | | | |
| Phocassäule | | × | | × | × | | |
| Curia | | | | | | | × |
| Haus der Vestalinnen | | | | × | | | |
| Portikus der zwölf Götter | | × | | × | | | × |
| Tempel des Antonius und der Fausta | × | × | | × | × | × | × |
| Tempel des Castor und Pollux | × | × | × | × | × | × | × |
| Tempel des Romulus | | × | | | | | |
| Tempel des Saturn | | | | × | × | | × |
| Tempel des Vespasian | | | | × | × | | |
| Tempel der Vesta | | × | × | × | × | | × |






Der Begriffsverband zum Kontext