TECHNISCHE UNIVERSITÄT
DRESDEN

Fakultät Mathematik und
Naturwissenschaften,
Fachrichtung Mathematik

Institut für Algebra

Halbgruppen binärer Relationen auf einer 3-elementigen Menge

Arbeit im Rahmen des Seminars
„Schreiben mathematischer Texte“

Autoren: Daniela Kriegel, Andreas Hahn, Robert Jäschke
E-Mail: daniela.kriegel@web.de
andreas@hahn.name
jaeschke@math.tu-dresden.de

Betreuer: Prof. Dr. Pöschel
Datum: 9. August 2004

Halbgruppen binärer Relationen auf einer 3-elementigen Menge

Eine Aufgabe für das Seminar „Schreiben mathematischer Texte“

Binäre Relationen treten sehr häufig in der Mathematik (wie auch in Anwendungen) auf. Verallgemeinert man die Komposition von Funktionen auf Relationen, so erhllt man die Relationenkomposition:

$$\varrho;\sigma := \{(x,y) \mid \exists\, z : (x,z) \in \varrho \text{ und } (z,y) \in \sigma\}$$

(hier für binäre Relationen $\varrho, \sigma \subseteq A \times A$ auf einer gegebenen Menge A). Die binären Relationen auf einer Menge A bilden mit der Relationenkomposition ein Monoid $M_A := \langle \mathfrak{P}(A^2), ; \rangle$. Ziel dieser Seminararbeit ist es, Halbgruppen bzw. Monoide zu untersuchen, die sich mit binären Relationen auf einer 3-elementigen Menge $A = \{0,1,2\}$ darstellen lassen (d.h. als Unterhalbgruppen bzw. Untermonoide von M_A).

Im einzelnen sollte folgendes untersucht werden:

- Darstellung von binären Relationen als Graphen,
- Anzahl der binären Relationen auf einer n-elementigen Menge und der Isomorphietypen (zumindest für kleine $n \in \{2,3\}$),
- Wählen Sie einige Eigenschaften für binäre Relationen (z.B. reflexiv, irreflexiv ($\forall\, x \in A : (x,x) \notin \varrho$), symmetrisch, antisymmetrisch, transitiv, streng transitiv ($\varrho;\varrho = \varrho$), Äquivalenzrelation, Ordnungsrelation, Graphen von Funktionen, Graphen von Permutationen, ...) und untersuchen Sie, welche Eigenschaften bei der Relationenkomposition erhalten bleiben (Beweis bzw. Gegenbeispiel).
- Beschreibung aller Unterhalbgruppen von M_A ($A = \{0,1,2\}$), die von einem Element erzeugt werden (eventuell zunächst Beschränkung auf irreflexive Erzeugende).

  Es ist sicher hilfreich, sich erst zu überlegen, wie die erzeugenden Unterhalbgruppen zusammenhängen, wenn die Relationen (als Graphen) isomorph sind. Elemente ϱ und σ aus M_A heißen `isomorph`, falls eine Bijektion $h : A \to A$ existiert, so dass

  $$\forall\, x,y \in A : (x,y) \in \varrho \iff (h(x),h(y)) \in \sigma$$

  (h ist dann Isomorphismus).

- Auffinden eines möglichst kleinen (und möglichst irredundanten) Erzeugendensystems für das ganze Monoid M_A.

- Ein Idealziel wäre, alle Unterhalbgruppen von M_A zu charakterisieren (das wird wohl zu umfangreich werden). Als Teilziel kann man eine „überschaubare“ Klasse $M' \subseteq M_A$ von Relationen (z.B. mit einer der bereits untersuchten Eigenschaften) nehmen (M' sollte natürlich abgeschlossen unter Relationenkomposition sein) und fragen, welche Unterhalbgruppen in M' existieren und diese möglichst vollständig charakterisieren.

- Jede Halbgruppe ist bekanntlich isomorph zu einer Halbgruppe von 1-stelligen Funktionen $f : A \longrightarrow A$ (mit der Funktionenkomposition ; als Halbgruppenoperation) auf einer geeigneten Menge A (also eine Unterhalbgruppe von $\langle A^A, ; \rangle$) (Satz von Cayley). Geben Sie eine (möglichst kleine) Unterhalbgruppe von M_A an, die sich nicht als Unterhalbgruppe von $\langle A^A, ; \rangle$ darstellen lässt ($A = \{0, 1, 2\}$).

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

1.1 Halbgruppen und Monoide

In diesem Abschnitt wollen wir uns zunächst mit einigen grundlegenden Definitionen und Beispielen auseinandersetzen, die für die weitere Untersuchung nützlich sein werden. Zu Beginn führen wir die Begriffe Halbgruppe, Unterhalbgruppe, Monoid, Untermonoid und binäre Relation ein.

Definition 1 Sei H eine Menge und $\circ$ eine binäre Operation auf H, also ist H bezüglich der Operation $\circ$ abgeschlossen. Dann heißt $(H, \circ)$ *Halbgruppe*, falls für alle $a, b, c \in H$ gilt, dass $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ (Assoziativität).

Bemerkung: Ist aus dem Zusammenhang ersichtlich, dass man eine Menge mit einer binären Operation betrachtet, die eine Halbgruppe bildet, so schreibt man statt $(H, \circ)$ oft auch nur H.

Beispiel 2 Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, versehen mit der üblichen Additionsoperation, ist eine Halbgruppe. Denn diese Operation ist auf ganz $\mathbb{N}$ definiert und assoziativ.
Auch die Menge der $n \times n$-Matrizen, versehen mit der bekannten Matrizenmultiplikation, bildet eine Halbgruppe.

Definition 3 Sei H eine Halbgruppe und U eine bezüglich der Halbgruppenoperation abgeschlossene Teilmenge von H, dann heißt U *Unterhalbgruppe* der Halbgruppe H.

Beispiel 4 $(\mathbb{N}, +)$ ist nach Beispiel 2 eine Halbgruppe. Da die Menge der positiven geraden Zahlen bezüglich der Halbgruppenoperation abgeschlossen ist, bildet sie somit eine Unterhalbgruppe von $(\mathbb{N}, +)$.

Definition 5 Sei H eine Halbgruppe und K eine Teilmenge von H.

(i) Der Durchschnitt aller Unterhalbgruppen, die K enthalten, wird mit $\langle K \rangle$ bezeichnet und die *von K erzeugte Unterhalbgruppe* von H genannt.

(ii) Ist $\langle K \rangle = H$, so heißt K ein *Erzeugendensystem* von H.

(iii) Ist $|K| = 1$, dann heißt $\langle K \rangle$ *zyklisch erzeugt*.

Wie so ein Erzeugendensystem aussieht, wird uns später noch beschäftigen. Darüber hinaus versuchen wir, für eine konkrete Halbgruppe ein möglichst kleines Erzeugendensystem zu finden.
Nun führen wir noch den Begriff des Monoids ein, als Halbgruppe die mit einem Einselement versehen ist.

Definition 6 Ein *Monoid* ist eine Halbgruppe M, in der ein Element $e \in M$ derart existiert, dass für jedes beliebige Element a aus M gilt:

$$a \circ e = e \circ a = a.$$

Das Monoid bezeichnet man dann auch mit $(H, \circ, e)$ und nennt e das *neutrale Element* von H.

Beispiel 7 Ergänzen wir unser erstes Beispiel, indem wir $\mathbb{N}$ durch $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ ersetzen, so bildet $(\mathbb{N}_0, +, 0)$ ein Monoid.

1.2 Binäre Relationen

Jetzt erklären wir den Begriff der binären Relation, weil wir später dann diese als Elemente eines Monoids betrachten werden. Im Folgenden werden wir dann die Begriffe Relation und binäre Relation synonym verwenden.

Definition 8 Sei A eine beliebige Menge. Eine Teilmenge ϱ von $A \times A$ heißt *binäre Relation* auf A. Mit M_A bezeichnen wir die Menge aller binären Relationen auf A.

In den folgenden beiden Definitionen klassifizieren wir binäre Relationen bezüglich bestimmter Eigenschaften.

Definition 9 Sei A eine Menge und ϱ eine Relation in A. Dann heißt ϱ

(i) *reflexiv*, falls für alle a aus A stets $(a, a) \in \varrho$ gilt,

(ii) *transitiv*, falls für alle $(a, b) \in \varrho$ und $(b, c) \in \varrho$ auch $(a, c) \in \varrho$ gilt,

(iii) *symmetrisch*, falls für alle $(a, b) \in \varrho$ auch $(b, a) \in \varrho$ gilt,

(iv) *antisymmetrisch*, falls für alle $a, b \in A$ gilt, dass aus $(a, b) \in \varrho$ und $(b, a) \in \varrho$ stets $a = b$ folgt,

(v) *konnex*, falls für alle $a, b \in A$ mit $a \neq b$ gilt, dass $(a, b) \in \varrho$ oder $(b, a) \in \varrho$,

(vi) *streng konnex*, falls für alle $a, b \in A$ gilt, dass $(a, b) \in \varrho$ oder $(b, a) \in \varrho$,

(vii) *Äquivalenzrelation*, falls ϱ reflexiv, transitiv und symmetrisch ist,

(viii) *Ordnungsrelation*, falls ϱ reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist.

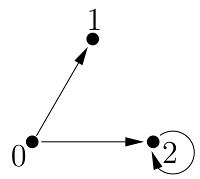
Definition 10 Sei ϱ eine binäre Relation auf einer Menge M und $f : A \to A$ eine Funktion. Dann heißt ϱ *Graph der Funktion* f, falls $\varrho = f^\bullet := \{(a, b) \in A \times A \mid b = f(a)\}$. Ist f bijektiv, so heißt f *Permutation*.

1.2.1 Darstellung binärer Relationen

In diesem Abschnitt widmen wir uns der Darstellung binärer Relationen. Hierzu führen den Begriff des gerichteten Graphen ein und definieren anschließend die Inzidenzmatrix einer binären Relation.

Definition 11 Sei V eine Menge und $E \subseteq V \times V$ eine Menge von geordneten Paaren. Dann heißt (V, E) *gerichteter Graph*. Die Elemente von V werden als *Knoten* und die Elemente von E als *Kanten* des Graphen bezeichnet.

Bei einer zeichnerischen Darstellung eines Graphen zeichnet man für jede Ecke $v \in V$ einen Punkt und beschriftet ihn mit v. Dann zeichnet man für alle Kanten $(v, w) \in E$ einen Pfeil vom Punkt v zum Punkt w.
Setzt man $V = A$ und $E = \varrho$ für ein $\varrho \in M_A$, so erhält man den Graphen (V, E) der binären Relation ϱ auf A.
Dies wollen wir an dem folgenden Beispiel verdeutlichen. Wir betrachten eine dreielementige Grundmenge $A = \{0, 1, 2\}$ und definieren auf dieser eine binäre Relation $\varrho := \{(0, 1), (0, 2), (2, 2)\}$. Diese Relation wird durch folgenden Graphen dargestellt:



Übrigens ist diese Relation nicht reflexiv, da nur $(2, 2) \in \varrho$ aber nicht $(0, 0)$ und $(1, 1)$ wie es die Definition 9 fordert. Bevor wir weitere Beispiele binärer Relationen betrachten, führen wir noch die Darstellung binärer Relationen mittels Inzidenzmatrizen ein. Die Elemente einer solchen Matrix fassen wir dann als Wahrheitswerte auf.

Definition 12 Sei $A = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ und ϱ eine binäre Relation auf A. Dann heißt die $n \times n$-Matrix $I_\varrho = (r_{ij})_{i,j \in A}$ mit

$$r_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i, j) \in \varrho \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die Inzidenzmatrix von ϱ.

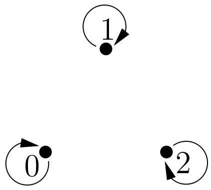
Die Inzidenzmatrix der auf $A = \{0, 1, 2\}$ definierten Relation $\varrho := \{(0, 1), (0, 2), (2, 2)\}$ sieht dann so aus:

$$I_\varrho = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Diese Form der Darstellung eignet sich besonders dann, wenn man Produkte von Relationen bilden möchte. Wie so ein Produkt zwei binärer Relationen definiert ist, werden wir gleich sehen. Zunächst aber betrachten wir einige Beispiele binärer Relationen, um uns so die schon definierten Eigenschaften besser veranschaulichen zu können. Als Grundmenge betrachten wir dabei immer die Menge $A = \{0, 1, 2\}$.

Beispiel 13 Sehen wir uns die kleinste reflexive Relation an. Unsere Relation besteht also genau aus der Menge $\varrho := \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ Die Inzidenzmatrix und der Graph von ϱ stellen sich dann so dar:

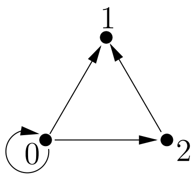
$$I_\varrho = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Wir sehen, dass eine Relation genau dann reflexiv ist, wenn die Hauptdiagonale ihrer darstellenden Inzidenzmatrix voll besetzt ist.

Beispiel 14 Betrachten wir $\varrho := \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 2)\}$. Diese Relation ist transitiv, denn mit $(0, 1)$ und $(1, 2)$ gehört auch $(0, 2)$ zur Relation - genau wie in der Definition gefordert. Auch hier wollen wir uns Graph und Inzidenzmatrix wieder ansehen:

$$I_\varrho = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

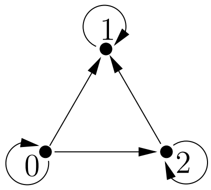


Charakteristisch für den Graphen einer transitiven Relation ist, dass es immer einen Pfeil von a nach c gibt, wenn es einen weiteren Punkt b gibt, so dass a und c schon durch Pfeile über b verbunden sind.

Gleich werden wir zur Definition des Relationenproduktes kommen, sehen uns aber abschließend ein Beispiel einer streng konnexen und einer nicht streng konnexen Relation an und befassen uns danach noch mit der Frage, wieviele Relationen es überhaupt in Abhängigkeit von der Mächtigkeit der Grundmenge A gibt.

Beispiel 15 Sei $\varrho := \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (0, 1), (0, 2), (2, 1)\}$ Diese Relation ist streng konnex und sieht veranschaulicht so aus:

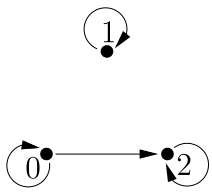
$$I_\varrho = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



Eine streng konnexe Relation ist nach Definition insbesondere also immer reflexiv.

Beispiel 16 Mit $\varrho := \{(0,0),(1,1),(2,2),(0,2)\}$ haben wir nun zwar eine reflexive Relation definiert; da aber weder $(1,2)$, noch $(2,1)$ zu ϱ gehören, ist diese Relation nicht streng konnex.

$$I_\varrho = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



1.2.2 Anzahl der binären Relationen auf einer n-elementigen Menge

Gemäß unserer Definition einer binären Relation ϱ auf einer Menge A ist jede Teilmenge von A^2 eine Relation. Die Mächtigkeit von A^2 ist damit gerade $2^{|A|^2}$. Betrachtet man so z.B. eine dreielementige Grundmenge $A := \{0,1,2\}$, so ergibt sich für die Menge aller binären Relationen auf A folglich:

$$2^{|A|^2} = 2^{3^2} = 2^9 = 512$$

Somit gibt es auf einer dreielementigen Grundmenge 512 Relationen.

1.3 Das Relationenprodukt

Wenden wir uns nun aber der Definition des Produktes zweier binärer Relationen zu.

Definition 17 Das *Relationenprodukt* zweier binärer Relationen ϱ und σ auf einer Menge A ist definiert durch.

$$\varrho\,;\sigma := \{(a,b) \mid \exists c \in A : (a,c) \in \varrho \wedge (c,b) \in \sigma\}$$

Diese Definition scheint zunächst ziemlich abstrakt und unpraktisch, wird aber klarer, wenn man sie sich mittels Inzidenzmatrizen veranschaulicht und sich dabei in Erinnerung ruft, dass wir die Elemente jeder Inzidenzmatrix als Wahrheitswert ansehen.

Definition 18 Seien I_ϱ und I_σ zwei $n \times n$-Inzidenzmatrizen, dann ist durch

$$I_\varrho \circ I_\sigma := \bigvee_{i=0}^{n-1} \bigvee_{k=0}^{n-1} r_{ik} s_{kj}$$

auf der Menge der $n \times n$-Inzidenzmatrizen eine binäre Operation definiert.

Die Definition bildet das Äquivalent zum Produkt von Matrizen, wobei Addition und Multiplikation durch Konjunktion und Disjunktion ersetzt wurden. Deshalb gilt (siehe [2], S. 307):

$$I_{\varrho;\sigma} = I_\varrho \circ I_\sigma.$$

Ganz wie bei der Matrizenmultiplikation ist auch das Relationenprodukt allgemein nicht kommutativ. Das schließt natürlich nicht aus, dass es im konkreten Einzelfall nicht doch so sein könnte.

Satz 19 *Die Menge M_A versehen mit dem auf M_A definierten Relationenprodukt bildet eine Halbgruppe $\langle M_A, ;\rangle$.*

Beweis: Wir müssen die Assoziativität des Relationproduktes zeigen, d.h. für alle $\varrho, \sigma, \tau \in M_A$ muss $(\varrho\,;\sigma)\,;\tau = \varrho\,;(\sigma\,;\tau)$ gelten. Sei $(x,y) \in (\varrho\,;\sigma)\,;\tau$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
(x,y) \in (\varrho\,;\sigma)\,;\tau &\overset{(1)}{\iff} \exists z_1 : (x,z_1) \in (\varrho\,;\sigma) \;\wedge\; (z_1,y) \in \tau \\
&\overset{(2)}{\iff} \exists z_1 : \big(\exists z_2 : (x,z_2) \in \varrho \wedge (z_2,z_1) \in \sigma\big) \;\wedge\; (z_1,y) \in \tau. \\
&\overset{(3)}{\iff} \exists z_1 \exists z_2 : (x,z_2) \in \varrho \;\wedge\; (z_2,z_1) \in \sigma \;\wedge\; (z_1,y) \in \tau \\
&\overset{(4)}{\iff} \exists z_2 : (x,z_2) \in \varrho \;\wedge\; \big(\exists z_1 : (z_2,z_1) \in \sigma \wedge (z_1,y) \in \tau\big) \\
&\overset{(5)}{\iff} (x,y) \in \varrho\,;(\sigma\,;\tau)
\end{aligned}$$

Die Äquivalenzen $(1), (2)$ und (5) gelten nach Definition des Relationenproduktes und die Äquivalenzen (3) und (4) weil $\wedge$ assoziativ ist.
Damit ist das Relationenprodukt assoziativ und $\langle M_A, ;\rangle$ eine Halbgruppe. □

Bemerkung: Die eben gezeigte Assoziativität erlaubt uns, Klammern beliebig zu setzen, auch bei Ausdrücken mit endlich vielen Relationen. Aus diesem Grund können wir für $\underbrace{\varrho\,;\varrho\,;\cdots;\varrho}_{n-mal}$ mit $n \in \mathbb{N}$ auch ϱ^n schreiben.

M_A ist sogar ein Monoid, denn das neutrale Element ist die in Beispiel 13 auf Seite 8 dargestellte kleinste reflexive Relation.

Da wir nun das Relationenprodukt definiert haben, können wir einer Relation noch eine weitere Eigenschaft zuordnen und ergänzend bemerken, dass eine Relation ϱ genau dann transitiv ist, falls $\varrho\,;\varrho \subseteq \varrho$.

Definition 20 Sei A eine endliche Grundmenge und ϱ eine Relation auf $A \times A$. Dann heißt ϱ *streng transitiv*, falls $\varrho\,;\varrho = \varrho$ gilt.

Wenn man sich nun gewissen Klassen solcher Relationen, wie der Klasse der Äquivalenzrelationen oder der Klasse der reflexiven Relationen, zuwendet, so ist es durchaus von Interesse zu fragen ob eine Klasse bezüglich des Relationenproduktes abgeschlossen ist. Nicht immer ist die Antwort ganz einfach. So ist das Produkt von zwei Äquivalenzrelationen im Allgemeinen nicht wieder eine Äquivalenzrelation. Allerdings erhält sich diese Eigenschaft, wenn die beiden konkret betrachteten Relationen bezüglich des Relationenproduktes kommutieren ([5], S. 6).

1.3.1 Eigenschaften, die durch das Relationenprodukt erhalten werden

Betrachtet man eine Eigenschaft aus Definition 9 auf Seite 6, dann sagt man, dass das Relationenprodukt diese Eigenschaft *erhält*, falls für alle Relationen $\varrho, \sigma \in M_A$ mit dieser Eigenschaft auch die Produktrelation $\varrho ; \sigma$ über diese Eigenschaft verfügt.

Welche Eigenschaften von Relationen sich übertragen und welche nicht, klären die nun folgenden Lemmata. Dabei benutzen wir die Bezeichnung S_A für die Menge aller auf einer Menge A definierten Permutationen bzw. O_A für die Menge aller Funktionen auf A. Wir ergänzen diese Ergebnisse im darauffolgenden Abschnitt um einige Gegenbeispiele, die deutlich machen, wie wenige der Eigenschaften von binären Relationen aus Definition 9 auf Seite 6 durch das Relationenprodukt erhalten werden.

Lemma 21 *Sei A eine endliche Menge und ϱ, σ zwei Relationen auf A. Dann gilt:*

(i) Sind ϱ, σ reflexiv, dann ist auch $\varrho ; \sigma = \tau$ reflexiv.

(ii) Sind ϱ, σ streng konnex, dann ist auch $\varrho ; \sigma = \tau$ streng konnex.

Beweis: (i) Wir haben zu zeigen, dass für alle $x \in A$ auch $(x, x) \in \varrho ; \sigma$, falls $(x, x) \in \varrho$ und $(x, x) \in \sigma$. Dies folgt jedoch sofort aus der Definition des Relationenproduktes, wenn wir $c := x$ setzen.

(ii) Nun ist zu zeigen, dass für beliebige $x, y \in A$ gilt: $(x, y) \in \varrho ; \sigma$ oder $(y, x) \in \varrho ; \sigma$. Dazu unterscheiden wir die beiden Fälle, dass $(x, y) \in \varrho$ oder $(y, x) \in \varrho$ ist (wegen der strengen Konnexität von ϱ gibt es keine weiteren):

Fall 1: Aus $(x, y) \in \varrho$ folgt mit der aus der strengen Konnexität von σ folgenden Reflexivität, dass $(y, y) \in \sigma$ ist, also $(x, y) \in \varrho ; \sigma$ (nach Definition des Relationenproduktes mit $c := y$).

Fall 2: Ganz analog folgt mit $(y, x) \in \varrho$ und $(x, x) \in \sigma$, dass (y, x) in $\varrho ; \sigma$ ist. $\square$

Bemerkung: Wir weisen darauf hin, dass wir im zweiten Teil des Beweises die Eigenschaft der zweiten Relation streng konnex zu sein nicht verwendet haben, sondern lediglich die daraus folgende Eigenschaft der Reflexivität. Deshalb ist also bereits das Produkt einer streng konnexen und einer reflexiven Relation streng konnex.

Lemma 22 *Seien $\varrho \in M_A$ und $\sigma \in M_A$ Graphen von Funktionen, d.h. $\varrho = f^\bullet$ und $\sigma = g^\bullet$ für geeignete $f, g \in O_A$. Dann gilt:*

$$\varrho ; \sigma = f^\bullet ; g^\bullet = (f ; g)^\bullet$$

Beweis: Sei $(x, y) \in A^2$ beliebig gewählt, dann gelten die Äquivalenzen

$$\begin{aligned}
(x, y) \in \varrho\,;\sigma &\iff (x, y) \in f^\bullet\,; g^\bullet \\
&\iff \exists z \in A : (x, z) \in f^\bullet \wedge (z, y) \in g^\bullet \\
&\iff \exists z \in A : f(x) = z \wedge g(z) = y \\
&\iff g(f(x)) = y \\
&\iff (f\,; g)(x) = y \\
&\iff (x, y) \in (f\,; g)^\bullet .
\end{aligned}$$

Und damit ist die Aussage des Lemmas bewiesen. □

Folgerung: Das Lemma zeigt, daß das Relationenprodukt die Eigenschaft einer Relation, Graph einer Funktion zu sein, bewahrt. Insbesondere gilt dies natürlich für Permutationen und da das Funktionenprodukt von Permutationen wieder eine Permutation ist, ist auch das Relationenprodukt von Graphen von Permutationen wieder der Graph einer Permutation.
Anders betrachtet zeigt das Lemma, dass die Abbildung

$$()^\bullet : O_A^{(1)} \to M_A, f \mapsto f^\bullet$$

eine strukturverträgliche Abbildung, also ein *Homomorphismus* ist (dabei sei $O_A^{(1)}$ die Menge aller 1-stelligen Funktionen auf A). Man beachte, dass die Abbildung injektiv ist.

1.3.2 Eigenschaften, die durch das Relationenprodukt nicht erhalten werden

Mit Abschnitt 1.3.1 auf der vorherigen Seite kennen wir vier Eigenschaften von Relationen, die durch das Relationenprodukt erhalten werden. Durch Gegenbeispiele erkennen wir nun noch, welche Relationeneigenschaften aus Definition 9 auf Seite 6 sich nicht erhalten. Dabei betrachten wir immer eine dreielementige Grundmenge $A = \{0, 1, 2\}$.

Transitivität: Gegeben seien die beiden Relationen $\varrho = \{(1, 0), (0, 2), (1, 2)\}$ sowie $\sigma = \{(2, 1), (0, 2)\}$ Beide Relationen sind transitiv. Wir bilden das Relationenprodukt als Produkt der beiden Inzidenzmatrizen und erhalten dann:

$$I_{\varrho;\sigma} = I_\varrho \circ I_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Und diese Relation, die aus der Menge $\varrho\,;\sigma = \{(0, 1), (1, 1), (1, 2)\}$ besteht, ist nicht mehr transitiv, denn sie enthält nicht das geordnete Paar $(0, 2)$.

Symmetrie: Nun geben wir ein Gegenbeispiel für die Übertragbarkeit der Symmetrieeigenschaft durch das Relationenprodukt an und betrachten dazu die symmetrischen Relationen $\varrho = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$ und $\sigma = \{(0,0),(1,1)\}$. Das Produkt der beiden Relationen ergibt sich wieder aus:

$$I_{\varrho;\sigma} = I_\varrho \circ I_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Und da $\varrho\,;\sigma$ das Paar $(1,2)$ nicht enthält, wohl aber das Paar $(2,1)$, ist das Relationenprodukt der beiden symmetrischen Relationen ϱ und σ nicht symmetrisch.

Antisymmetrie: Wir geben uns die zwei offensichtlich antisymmetrischen Relationen $\varrho = \{(0,0),(0,1),(0,2),(1,1),(1,2)\}$ und $\sigma = \{(0,0),(1,1),(2,0),(2,1),(2,2)\}$ vor und betrachten das Produkt $\varrho\,;\sigma$:

$$I_{\varrho;\sigma} = I_\varrho \circ I_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$I_{\varrho;\sigma}$ stellt Inzidenzmatrix der Allrelation dar, welche symmetrisch ist; also ist $\varrho\,;\sigma$ nicht antisymmetrisch.

Bemerkung: Die hier gewählten antisymmetrischen Relationen sind beide auch Ordnungsrelationen, da sie außerdem noch transitiv und reflexiv sind. Also wissen wir somit auch, dass die Eigenschaft Ordnungsrelation zu sein durch das Relationenprodukt verloren gehen kann.

Konnexität: Betrachten wir die Relation $\varrho = \{(0,1),(0,2),(1,2)\}$, welche konnex ist. Dann gilt für das Produkt

$$I_{\varrho;\varrho} = I_\varrho \circ I_\varrho = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir sehen, dass $I_{\varrho;\varrho}$ offensichtlich eine nicht konnexe Relation darstellt.

Strenge Transitivität: Wir werden jetzt zeigen, dass das Produkt zweier streng transitiver Relationen nicht notwendig wieder streng transitiv ist. Zunächst geben wir zwei streng transitive Relationen an, überprüfen der Vollständigkeit halber diese Eigenschaft (denn sie ist der Relation selbst nicht sofort anzusehen) und bilden dann das Produkt dieser beiden Relationen, um letztendlich erkennen zu müssen, dass sich die strenge Transitivität ebenfalls nicht erhält.

Wir geben uns also zunächst die Relationen $\varrho = \{(0,0),(0,1)\}$ und $\sigma = \{(1,1),(1,2)\}$ vor und zeigen, dass diese streng transitiv sind, also $\varrho\,;\varrho = \varrho$ bzw. $\sigma\,;\sigma = \sigma$ gilt:

$$I_{\varrho;\varrho} = I_\varrho \circ I_\varrho = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Für die Relation ϱ wäre die strenge Transitivität also gezeigt, denn das Produkt ihrer Inzidenzmatrizen ergibt wieder ihre Inzidenzmatrix. Bleibt die Relation σ:

$$I_{\sigma;\sigma} = I_\sigma \circ I_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Auch hier ergibt sich die vermutete Eigenschaft, die Relation σ ist streng transitiv. Bilden wir also das Produkt aus ϱ und σ:

$$I_{\varrho;\sigma} = I_\varrho \circ I_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Um nun zu sehen, dass $\varrho;\sigma$ die Eigenschaft der strengen Transitivität nicht mehr besitzt, bilden wir abschließend noch das Produkt aus $\varrho\,;\sigma$ und $\varrho\,;\sigma$:

$$I_{(\varrho;\sigma);(\varrho;\sigma)} = I_{\varrho;\sigma} \circ I_{\varrho;\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Und wir erkennen sofort, dass $\varrho\,;\sigma$ die gewünschte Eigenschaft nicht mehr besitzt, denn die sich ergebende Inzidenzmatrix stellt eine andere Relation dar als die Inzidenzmatrix $I_{\varrho;\sigma}$ darstellt.

2 Isomorphietypen

Im folgenden wollen wir die Struktur der Elemente von M_A genauer untersuchen. Gibt es Relationen, die eine gewisse Ähnlichkeit, welche wir noch genauer definieren müssen, untereinander besitzen? Wieviele verschiedene Möglichkeiten, „richtig“ verschiedene Relationen zu finden, gibt es dann? Und wie verhält es sich dann mit den zugehörigen Graphen?

Definition 23 Zwei Relationen ϱ und σ aus M_A heißen *isomorph*, falls eine Bijektion $h : A \to A$ existiert, so dass gilt:

$$\forall x, y \in A : (x,y) \in \varrho \iff (h(x), h(y)) \in \sigma$$

Wir schreiben dann auch $\varrho \cong \sigma$ und nennen h einen *Isomorphismus*.

Bemerkung: Wenn A endlich ist, so sind die Isomorphismen gerade die Permutationen.

Definition 24 Für jedes $\varrho \in M_A$ bezeichne $[\varrho] := \{\sigma \mid \varrho \cong \sigma\}$ die *Isomorphieklasse* oder den *Isomorphietyp* von ϱ.

Innerhalb einer solchen Menge werden also alle Relationen zusammengefasst, die bis auf Isomorphie gleich sind.
Auf Graphen bezogen bedeuten diese Definitionen ebenfalls, dass die Graphen isomorph, d.h. „bis auf Umbenennung der Elemente“ gleich sind. Diesen Umstand haben wir uns zu Nutze gemacht, um die Anzahl der Elemente pro Isomorphieklasse zu bestimmen.
Dazu haben wir uns zuerst einen Graphen ohne Kanten aufgemalt und dann alle Möglichkeiten gesucht, eine Kante zu platzieren – dies entspricht den Relationen die genau ein Paar aus $A \times A$ enthalten. Danach haben wir alle Möglichkeiten mit zwei Kanten, danach mit drei, usw. gesucht – entsprechend also den Relationen mit drei und mehr Elementen. Hierbei erwies sich die Graphendarstellung sehr nützlich, denn man sieht anhand der Automorphismen des Graphen (hier meist durch Spiegelung, Drehung erkennbar) leicht, wieviele isomorphe Graphen es gibt.
Im wesentlichen betrachteten wir dabei Graphen ohne Beschriftungen, denn diese repräsentieren die Isomorphietypen.

2.1 Der Fall $n = 2$

Es existieren insgesamt 10 Isomorphietypen für die 16 verschiedenen binären Relationen auf A, welche in Tabelle 1 auf der nächsten Seite aufgelistet sind. Dabei seien $a, b \in A$ mit $a \neq b$.

2.2 Der Fall $n = 3$

Es existieren insgesamt 104 Isomorphietypen.
Da eine Relation aus M_A im Fall $n = 3$ maximal neun Elemente haben kann, ergibt sich eine Symmetrie derart, dass jede Relation mit fünf oder mehr Elementen Komplement einer Relation mit vier oder weniger Elementen ist.
Aus diesem Grund reicht es, lediglich die 52 Isomorphietypen für Relationen mit weniger als fünf Elementen zu notieren, da sich die übrigen Typen als Komplement ergeben.
Die Tabelle 2 auf Seite 17 enthält die unbeschrifteten Graphen für die entsprechenden Isomorphietypen. Die Zahl unter jedem Graphen gibt die Anzahl der Elemente pro Isomorphieklasse an.

2.3 Isomorphismen und Graphen von Permutationen

Im Abschnitt 2 haben wir festgestellt, dass isomorphe Relationen gerade durch Permutationen aufeinander abgebildet werden. Jetzt werden wir sehen, dass isomorphe Relationen sogar schon durch Komposition mit Relationen, die Graphen von Permutationen sind, aufeinander abgebildet werden.

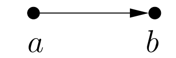
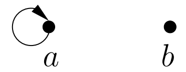
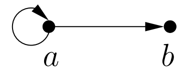
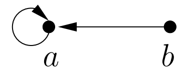
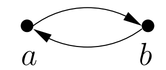
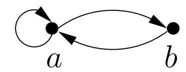
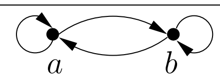
Nr.	Anzahl ($\|[\varrho]\|$)	Darstellung von ϱ als Menge	Darstellung als Graph
1	1	$\{\}$	
2	2	$\{(a,b)\}$	
3	2	$\{(a,a)\}$	
4	2	$\{(a,a),(a,b)\}$	
5	2	$\{(a,a),(b,a)\}$	
6	1	$\{(a,a),(b,b)\}$	
7	1	$\{(a,b),(b,a)\}$	
8	2	$\{(a,a),(a,b),(b,a)\}$	
9	2	$\{(a,a),(a,b),(b,b)\}$	
10	1	$\{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b)\}$	

Tabelle 1: Isomorphietypen für den Fall $n = 2$

Definition 25 Für eine Relation ϱ definiert man durch $\varrho^{-1} := \{(y,x) \mid (x,y) \in \varrho\}$ die zu ϱ *inverse Relation.*

Bemerkung: Wie man leicht sieht, gilt für den Graphen π einer Permutation p (d.h. $\pi = p^\bullet$) die Gleichung: $\pi^{-1} = (p^{-1})^\bullet$.

Lemma 26 *Sei $\pi \in M_A$ der Graph einer Permutation $p \in S_A$, d.h. $\pi = p^\bullet$. Dann gilt für $\varrho \in M_A$:*

$$\pi^{-1} ; \varrho ; \pi \cong \varrho$$

Beweis: Wir zeigen, dass p ein Isomorphismus ist (bijektiv ist es, denn p ist Permutation), d.h. es muss gelten:

$$\forall x, y \in A : (x,y) \in \varrho \iff (p(x), p(y)) \in \pi^{-1} ; \varrho ; \pi$$

„$\Rightarrow$“: Sei $(x,y) \in \varrho$. Dann ist $(p(x),p(y)) \in \pi^{-1} ; \varrho ; \pi$ äquivalent zu:

$$\exists z_1, z_2 \in A : (p(x), z_1) \in \pi^{-1} \wedge (z_1, z_2) \in \varrho \wedge (z_2, p(y)) \in \pi.$$

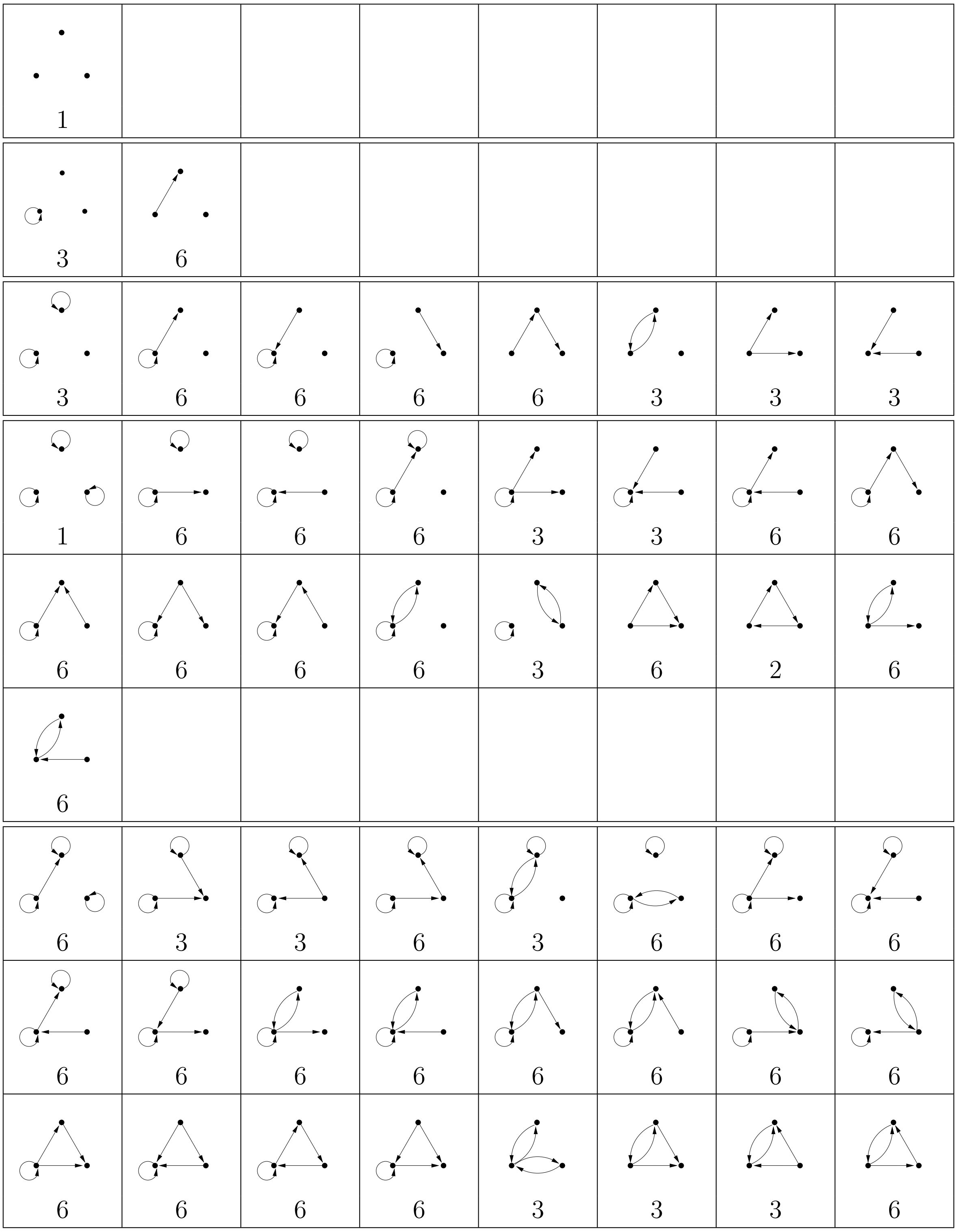
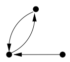


Tabelle 2: Isomorphietypen und Anzahl der Elemente pro Isomorphieklasse für den Fall $n = 3$ (jeder Tabellen-„Block“ enthält Relationen gleicher Mächtigkeit)

Mit $z_1 := x,\ z_2 := y$ müssen wir daher zeigen, dass

$$(p(x), x) \in \pi^{-1} \ \wedge \ (x, y) \in \varrho \ \wedge \ (y, p(y)) \in \pi$$

gilt. Nach Voraussetzung ist $(x, y) \in \varrho$ und auch $(y, p(y)) \in \pi$ (für alle $y \in A$), denn $\pi = p^\bullet$. Außerdem ist nach Definition von π^{-1} auch $(p(x), x) \in \pi^{-1}$ (für alle $x \in A$) und damit ist $(p(x), p(y)) \in \pi^{-1} ; \varrho ; \pi$.
„$\Leftarrow$": Sei $(p(x), p(y)) \in \pi^{-1} ; \varrho ; \pi$. Dann folgt daraus, dass $z_1, z_2 \in A$ existieren, so dass $(p(x), z_1) \in \pi^{-1}$ und $(z_1, z_2) \in \varrho$ und $(z_2, p(y)) \in \pi$ gilt. Da π^{-1} und π Graphen von Permutationen sind, ist leicht zu sehen, dass $z_1 = x$ und $z_2 = y$ gelten muss. Dann gilt auch $(x, y) \in \varrho$ und damit ist diese Implikation bewiesen. $\square$

Beispiel 27 Betrachten wir die sechs Relationen vom Isomorphie-Typ  aus Tabelle 2 auf der vorherigen Seite. Dann lassen sich durch Relationenkomposition mit geeigneten Permutationen aus $\varrho := \{(0, 1), (1, 2), (2, 1)\}$ die übrigen fünf Relationen folgendermaßen erzeugen:

$$\begin{aligned}
\{(2, 1), (1, 0), (0, 1)\} &= ((02)(1))^\bullet ; \varrho ; ((02)(1))^\bullet \\
\{(1, 2), (2, 0), (0, 2)\} &= ((021))^\bullet ; \varrho ; ((012))^\bullet \\
\{(0, 2), (2, 1), (1, 2)\} &= ((0)(12))^\bullet ; \varrho ; ((0)(12))^\bullet \\
\{(2, 0), (0, 1), (1, 0)\} &= ((012))^\bullet ; \varrho ; ((021))^\bullet \\
\{(1, 0), (0, 2), (2, 0)\} &= ((01)(2))^\bullet ; \varrho ; ((01)(2))^\bullet
\end{aligned}$$

3 Zyklische Unterhalbgruppen

In diesem Abschnitt wollen wir zunächst Unterhalbgruppen von M_A betrachten, die von einem Element erzeugt werden. Wie sich zeigen wird, gibt es dabei genau acht mögliche Isomorphieklassen von Unterhalbgruppen. Zur Erinnerung führen wir hier nochmals die relevanten Definitionen auf:

Definition 28 Sei $\langle H, ;\rangle$ eine Halbgruppe, $X \subseteq H$ eine Teilmenge. Die kleinste Unterhalbgruppe von H, die X enthält, nennt man *die von X erzeugte Unterhalbgruppe* und bezeichnet sie mit $\langle X \rangle$.
Man nennt $\langle X \rangle$ auch das *Erzeugnis von X*. Oft schreibt man für $h \in H$ statt $\langle \{h\} \rangle$ auch einfach $\langle h \rangle$ und nennt eine solche Unterhalbgruppe *zyklisch.*

Lemma 29 *Für alle $h \in H$ ist $\langle h \rangle = \{h, h^2, h^3, \dots\}$.*

Beweis: Sei $h \in H$, $U := \{h, h^2, h^3, \dots\}$ und $x, y \in U$. Dann existieren $k, l \in \mathbb{N}$, so dass gilt: $x = h^k$ und $y = h^l$.
Dann gilt wegen der Assoiativität von ; für das Produkt: $x ; y = (h^k) ; (h^l) = h^{(k+l)} \in U$ und damit ist U eine Unterhalbgruppe von H.

Nun ist U in $\langle h \rangle$ enthalten, denn jede Unterhalbgruppe, die h enthält muss insbesondere alle Potenzen von h enthalten. Weiterhin ist $\langle h \rangle$ auch in U enthalten, denn U ist eine Unterhalbgruppe, die h enthält und $\langle h \rangle$ soll ja gerade die kleinste solche Unterhalbgruppe sein.
Damit gilt $U = \langle h \rangle$. □

Satz 30 *(siehe auch [1] auf Seite 6) Sei $h \in H$ und H Halbgruppe. Dann gilt: $\langle h \rangle$ ist isomorph zu $\langle \mathbb{N}, + \rangle$ oder $\langle h \rangle$ ist endlich und es existieren $r, m \in \mathbb{N}$, so dass $h^r = h^{r+m}$ und $\langle h \rangle = \{h, h^2, \ldots, h^{m+r-1}\}$ mit $|\langle h \rangle| = m + r - 1$.*

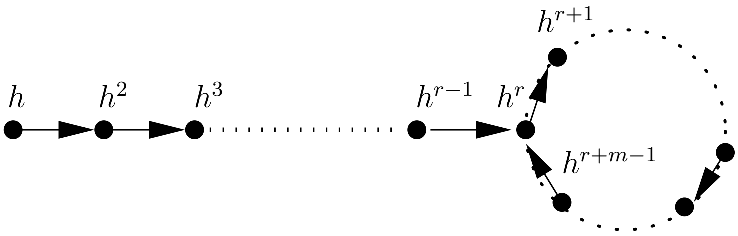


Abbildung 1: „Bratpfanne“

Beweis: Ist $\langle h \rangle = \{h, h^2, h^3, \ldots\}$ und aus $h^m = h^n$ folgt $m = n$, dann ist $\langle h \rangle$ isomorph zu $\langle \mathbb{N}, + \rangle$. Denn die (surjektive!) Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to \langle h \rangle : k \mapsto h^k$ ist dann injektiv und aufgrund der Rechenregeln für Potenzen sogar ein Homomorphismus, also Isomorphismus.
Andernfalls existieren $r, s \in \mathbb{N}$, so dass gilt $h^r = h^s, r < s$. Sei s die kleinste solche Zahl, so dass $h^r = h^s$ für $r < s$ gilt. Dann sind die Elemente $h, h^2, \ldots, h^{s-1}$ alle paarweise verschieden und r ist eindeutig bestimmt. Denn gäbe es ein $r' \neq r$ mit $h^{r'} = h^s, r' < s$, dann würde auch gelten $h^{r'} = h^r$ und $r' < r$ oder $r < r'$ und damit wäre s nicht die kleinste Zahl mit dieser Eigenschaft. Sei $m = s - r$. Dann gilt $h^r = h^{m+r}$ und daher auch $h^{r+km} = h^r$ für alle $k \in \mathbb{N}$.
Sei nun $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann existieren k und i aus $\mathbb{N}$ mit $0 \leq i < m$, so dass $n = km + i$ gilt. Dann folgt daraus:

$$h^{r+n} = h^{r+km+i} = h^{r+i}$$

d.h., alle h^{r+n} liegen schon zwischen h^r und h^{r+m-1} (da $i < m$). Damit folgt, dass die Elemente $h^r, h^{r+1}, \ldots, h^{r+m-1}$ alle paarweise verschieden sind und daher das Erzeugnis $\langle h \rangle$ endlich ist. □

Definition 31 Eine Unterhalbgruppe der Form $\langle h \rangle = \{h, h^2, \ldots, h^{r+m-1}\}$ mit $r + m - 1$ Elementen heißt *Unterhalbgruppe vom Typ* (r, m) („Bratpfanne“, siehe Abbildung 1).

Da M_A endlich ist, sind also alle von einem Element erzeugten Unterhalbgruppen von der im Satz genannten „Bratpfannen“-Form. Damit ergibt sich auch schon die Idee für den Isomorphismus, mit dem man alle Unterhalbgruppen gleichen (r, m)-Typs aufeinander abbilden kann:

Lemma 32 *Seien $\langle\varrho\rangle$ und $\langle\sigma\rangle$ zwei Unterhalbgruppen von M_A vom Typ (r, m) (wobei $r, m \in \mathbb{N}$). Dann definiert die folgende Abbildung einen Isomorphismus zwischen $\langle\varrho\rangle$ und $\langle\sigma\rangle$:*

$$\Phi : \langle\varrho\rangle \to \langle\sigma\rangle, \varrho^k \mapsto \Phi(\varrho^k) = \sigma^k$$

Beweis: Da $|\langle\varrho\rangle| = |\langle\sigma\rangle|$ endlich, reicht es zu zeigen, dass Φ ein surjektiver Homomorphismus ist. Dies sieht man aber schon durch Aufschreiben der Bilder bzw. Urbilder:

$$\begin{aligned}\langle\varrho\rangle =& \{\varrho, \varrho^2, \varrho^3, \ldots, \varrho^r, \varrho^{r+1}, \ldots, \varrho^{r+m-1}\}\\ \Phi(\langle\varrho\rangle) =& \{\Phi(\varrho), \Phi(\varrho^2), \Phi(\varrho^3), \ldots, \Phi(\varrho^r), \Phi(\varrho^{r+1}), \ldots, \Phi(\varrho^{r+m-1})\}\\ =& \{\sigma, \sigma^2, \sigma^3, \ldots, \sigma^r, \sigma^{r+1}, \ldots, \sigma^{r+m-1}\}\\ =& \langle\sigma\rangle\end{aligned}$$

Nun bleibt noch zu zeigen, dass Φ ein Homomorphismus ist. Seien dazu $\alpha, \beta \in \langle\varrho\rangle$. Dann existieren $k_\alpha, k_\beta \in \{1, 2, \ldots, r + m - 1\}$ mit $\alpha = \varrho^{k_\alpha}$ und $\beta = \varrho^{k_\beta}$ und es gilt wegen der Assoziativität der Relationenkomposition:

$$\begin{aligned}\Phi(\alpha\,;\beta) =& \Phi(\varrho^{k_\alpha}\,;\varrho^{k_\beta}) = \Phi(\varrho^{k_\alpha+k_\beta}) = \sigma^{k_\alpha+k_\beta}\\ =& \sigma^{k_\alpha}\,;\sigma^{k_\beta} = \Phi(\varrho^{k_\alpha})\,;\Phi(\varrho^{k_\beta}) = \Phi(\alpha)\,;\Phi(\beta)\end{aligned}$$

□

Bemerkung: Es ist leicht zu sehen, dass Unterhalbgruppen verschiedenen (r, m)-Typs nicht isomorph zueinander sind.

Folgerung: Damit beschreibt der Typ auch die Isomorphieklassen auf der Menge aller zyklischen Unterhalbgruppen. Für eine zyklische Unterhalbgruppe $\langle\varrho\rangle$ von M_A bezeichne $[\langle\varrho\rangle]$ die entsprechende Isomorphieklasse.
In Tabelle 3 auf der nächsten Seite sind alle acht Isomorphieklassen der zyklischen Unterhalbgruppen von M_A aufgelistet. Diese haben wir mittels eines Computerprogrammes ermittelt.
Die Graphen in dieser Tabelle dürfen nicht mit den Graphen der Isomorphietypen von Relationen verwechselt werden – sie zeigen in diesem Fall die Struktur jeder Unterhalbgruppe an (ein Pfeil bedeutet hier eine Multiplikation mit ϱ).

Bezeichnung: In Tabelle 3 auf der nächsten Seite sei mit $\neq_A$ die Ungleich-Relation auf A bezeichnet. Desweiteren soll im folgenden die Menge aller Relationen, die eine Unterhalbgruppe von M_A vom Typ $(5, 1)$ erzeugen mit Ω bezeichnet werden.

Bemerkung: Es gibt lediglich eine Unterhalbgruppe vom Typ $(1, 3)$, diese wird jeweils von den beiden Graphen von Permutationen $\{(0, 1), (1, 2), (2, 0)\}$ und $\{(0, 2), (1, 0), (2, 1)\}$ erzeugt und ist sogar eine Gruppe (mit der $=$-Relation auf A als neutralem Element).
Damit sind diese beiden Relationen die einzigen Elemente von M_A, die die gleiche zyklische Unterhalbgruppe erzeugen. Alle anderen Elemente erzeugen jeweils paarweise verschiedene, so dass es in M_A genau 511 zyklische Unterhalbgruppen in 8 Isomorphieklassen gibt.

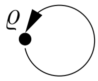
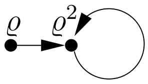
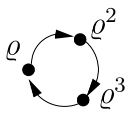
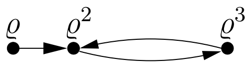
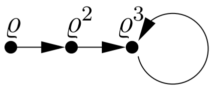
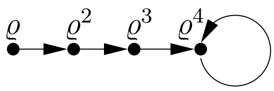
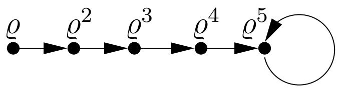
$\lvert\langle\varrho\rangle\rvert$	(r,m)	$\lvert[\langle\varrho\rangle]\rvert$	Graph	Beispiel für ϱ
1	$(1,1)$	123		$\{(0,0),(1,1),(2,2)\}$
2	$(1,2)$	33		$\{(0,0),(1,2),(2,1)\}$
2	$(2,1)$	252		$\neq_A$
3	$(1,3)$	1		$\{(0,1),(1,2),(2,0)\}$
3	$(2,2)$	12		$\{(0,1),(1,0),(2,1),(2,2)\}$
3	$(3,1)$	66		$\{(0,2),(1,0)\}$
4	$(4,1)$	18		$\{(0,0),(0,1),(1,2),(2,0)\}$
5	$(5,1)$	6		$\{(0,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$

Tabelle 3: Isomorphieklassen der zyklischen Unterhalbgruppen von M_A

4 Ein Erzeugendensystem von M_A

4.1 Einleitung

Im nachfolgenden Unterabschnitt wollen wir eine Teilmenge von M_A präsentieren, aus der man mittels Verknüpfung der einzelnen Elemente untereinander die ganze Halbgruppe M_A erzeugen kann. Dabei handelt es sich sogar um eine Basis. Vorher wollen wir jedoch noch einige Begriffe festlegen.

Definition 33 Sei $\langle H, ;\rangle$ eine Halbgruppe. Eine Teilmenge X von H heißt *Erzeugendensystem von* $\langle H, ;\rangle$, falls gilt: $\langle X\rangle = H$.

Definition 34 Sei $\langle H, ;\rangle$ eine Halbgruppe. Ein Erzeugendensystem B von H ist eine *Basis von* $\langle H, ;\rangle$, wenn es minimal ist, d.h. wenn gilt:

$$\forall b \in B : \langle B \setminus \{b\}\rangle \subsetneqq H$$

Bezeichnung: Im folgenden sollen einige Elemente von M_A besonders bezeichnet werden, da dies für die weiteren Ausführungen nützlich ist.

$$
\begin{aligned}
\pi_1 &:= \{(0,0),(1,2),(2,1)\} && = ((12))^\bullet \\
\pi_2 &:= \{(0,1),(1,0),(2,2)\} && = ((01))^\bullet \\
\omega &:= \{(0,1),(1,2),(2,1),(2,2)\} \\
\gamma &:= \{(0,1),(1,2)\} \\
\neq_A &:= \{(0,1),(0,2),(1,0),(1,2),(2,0),(2,1)\}
\end{aligned}
$$

Die dazugehörigen Graphen sind in den Abbildungen 2, 3, 4, 5 und 6 dargestellt.

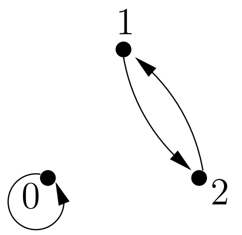


Abbildung 2: π_1

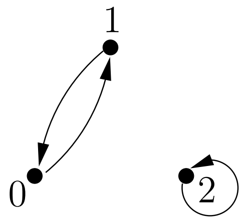


Abbildung 3: π_2

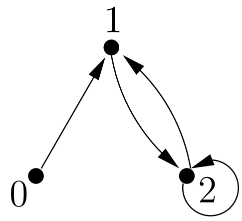


Abbildung 4: ω

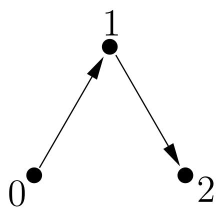


Abbildung 5: γ

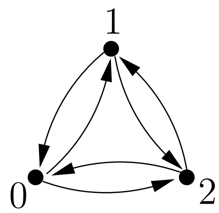


Abbildung 6: $\neq_A$

Dabei sind π_1 und π_2 Graphen von Permutationen (die als Relationen isomorph sind) und die von π_1 und π_2 erzeugte Unterhalbgruppe $\langle\{\pi_1, \pi_2\}\rangle$ (welche sogar eine Gruppe ist) enthält alle Graphen von Permutationen auf A. Weiterhin ist ω eine Relation, deren Unterhalbgruppe $\langle\omega\rangle$ genau fünf Elemente besitzt (also $\omega \in \Omega$, siehe Abschitt 3 auf Seite 20) und die Relation $\neq_A$ ist gerade die Ungleichheits-Relation auf A.

4.2 Finden eines Erzeugendensystems

Um nun ein Erzeugendensystem für M_A zu finden, haben wir ein Computerprogramm geschrieben, welches zu einer gegebenen Teilmenge X von M_A das Erzeugnis $\langle X\rangle$ bestimmt. Ist das Erzeugnis gleich M_A, so ist X ein Erzeugendensystem. Der Algorithmus ist in Tabelle 4 auf der nächsten Seite dargestellt.
Die naive Methode, alle Teilmengen zu testen, funktioniert aufgrund der großen Anzahl nicht und deshalb mussten wir anders vorgehen. Darum haben wir zunächst die zwei

- $\overline{M} := M$
- fertig := nein
- **while** fertig = nein **do**
  - $M_1 := \overline{M}$
  - fertig := ja
  - **while** $M_1 \neq \emptyset$ **do**
    - $m_1 \in M_1$
    - $M_2 := M_1$
    - **while** $M_2 \neq \emptyset$ **do**
      - $m_2 \in M_2$
      - $p := m_1 \,;\, m_2$
      - **if** $p \notin \overline{M}$
        - **then**
          - fertig := nein
          - $\overline{M} := \overline{M} \cup \{p\}$
        - **else**
      - $M_2 := M_2 \setminus \{m_2\}$
    - $M_1 := M_1 \setminus \{m_1\}$
- $\langle M \rangle := \overline{M}$

Tabelle 4: Algorithmus

Graphen von Permutationen π_1 und π_2 und ω in eine Menge getan und das Erzeugnis betrachtet. Dieses hatte schon 241 Elemente. Die Motivation gerade diese Relationen zu nehmen bestand darin, dass ω schonmal eine größtmögliche (5 Elemente) zyklische Unterhalbgruppe erzeugt und man mittels π_1 und π_2 ja alle Graphen von Permutationen und folglich durch die Isomorphiebeziehung (siehe Abschnitt 2.3 auf Seite 15) auch alle Elemente aller zyklischen Unterhalbgruppen mit fünf Elementen erhält.
Desweiteren haben wir dann noch alle Graphen von Funktionen und eine einelementige Relation hinzugenommen und erhielten ein Erzeugnis mit 380 Elementen. Im folgenden nahmen wir nach und nach Relationen hinzu, die im Erzeugnis noch nicht enthalten waren und schon nach fünf solchen Relationen konnten wir 506 Elemente erzeugen. Die Hinzunahme einer weiteren Relation erzeugte dann ganz M_A.
Letztendlich konnten wir also aus einer Menge mit 37 Elementen ganz M_A erzeugen.

Ziel war es jetzt, diese Menge zu reduzieren und eine Basis zu finden. Dazu entfernten wir nach und nach ein Element aus der Menge und prüften, ob immer noch ganz M_A erzeugt wurde. War dies nicht der Fall, so fügten wir das Element der Menge wieder hinzu, andernfalls fuhren wir fort.
Auf diese Weise konnten wir die Menge bis auf fünf Elemente reduzieren, von denen keines mehr weggelassen werden konnte. Damit hatten wir eine Basis von M_A gefunden.

4.3 Ergebnis

Satz 35 *Die Menge $B := \{\pi_1, \pi_2, \omega, \gamma, \neq_A\}$ ist eine Basis von M_A.*

Bemerkung: Leider haben wir dafür keinen Beweis im herkömmlichen Sinn finden können. Der Algorithmus in Abbildung 4 auf der vorherigen Seite erzeugt aus der Menge B zwar ganz M_A, aber um dies als Beweis zu akzeptieren, müsste die Korrektheit des Algorithmus bewiesen werden. Dies ist eine Aufgabe, die den Rahmen dieser Seminararbeit sprengen würde. Nachfolgend soll jedoch kurz betrachtet werden, welche Elemente von M_A im Erzeugnis von B liegen müssen.
Durch π_1 und π_2 erhält man von allen Relationen, die man durch Relationenkomposition in B erzeugen kann, jeweils die dazu isomorphen Relationen. Dadurch reduziert sich die Anzahl der von $B \setminus \{\pi_1, \pi_2\}$ zu erzeugenden Relationen erheblich. Im Zusammenhang mit $\gamma^2 = \{(1, 2)\}$ erhält man somit z.B. alle einelementigen Relationen und damit dann durch $(\neq_A)^2 = \nabla_A$ (die Allrelation auf A^2) alle Relationen der Form $\{(a, x) \mid x \in A\}$ ($a \in A$ fest) bzw. $\{(x, a) \mid x \in A\}$ ($a \in A$ fest). Die Bedeutung von ω als erzeugendes Element einer fünfelementigen Unterhalbgruppe wurde im vorherigen Abschnitt ja schon erläutert.
Weiterhin können die Relationen ω und γ durch jeweils dazu isomorphe Relationen ausgetauscht werden; $\neq_A$ ist nicht austauschbar, da es nur eine Relation dieses Isomorphietyps gibt. Auch π_1 und π_2 können durch beliebige andere Graphen von Permutationen ausgetauscht werden, wenn diese alle Graphen von Permutationen erzeugen.

Weitere Bemerkungen: Mittels des Algorithmus haben wir alle zwei- und alle dreielementigen Teilmengen von M_A getestet und keine weitere Basis gefunden. Die vierelementigen Teilmengen konnten wir aufgrund des Rechenaufwandes nicht testen, daher könnte es theoretisch noch eine Basis mit nur vier Elementen geben.
Ein möglicher Beweis, dass B zumindest ein Erzeugendensystem ist, bestünde darin, jedes Element von M_A als Produkt von Elementen aus B aufzuschreiben. Dies ist jedoch sehr unübersichtlich und deshalb haben wir darauf verzichtet.
Auch die Theorie der Relationenklone hilft hier nur wenig weiter, denn uns steht ja lediglich die Relationenkomposition zur Verfügung.

5 Charakterisierung einiger Unterhalbgruppen von M_A

In diesem Abschnitt wäre es ein Idealziel, alle Unterhalbgruppen von M_A zu charakterisieren. Da dies aber viel zu umfangreich ist, beschränken wir uns auf die Graphen von

Permutationen. Wenn man Permutationen mit ihren zugehörigen Graphen identifiziert, so bilden diese eine abgeschlossene Teilmenge von M_A, das heißt eine Unterhalbgruppe. Diese wollen wir auch mit S_A bezeichnen.
Im folgenden werden alle Unterhalbgruppen von S_A angegeben und vollständig charakterisiert.

Bemerkung: Jede Permutation ist eine spezielle binäre Relation, wenn man den zugehörigen Graphen der Permutation betrachtet. Das in Definition 17 auf Seite 9 auf der Menge aller binären Relationen definierte Relationenprodukt ist nach Lemma 22 auf Seite 11 für die Menge der Graphen von Funktionen (insbesondere also von Permutationen) abgeschlossen. Somit ist die Menge aller Permutationen eine Halbgruppe und sogar eine Gruppe, da sie ein neutrales Element und zu jedem Element ein inverses enthält.

In S_A ergeben sich fünf Unterhalbgruppen, die von nur einem Element erzeugt werden, und eine weitere Unterhalbgruppe, die von zwei Elementen erzeugt wird. Alle anderen Möglichkeiten eine Unterhalbgruppe von S_A zu bilden ergeben schon die sechs Unterhalbgruppen, die im folgenden genannt werden.

Wir stellen jede Permutation durch ihren Graphen, dar welcher ja eine spezielle binäre Relation ist, und geben diesen in seiner Inzidenzmatrix an. Zusätzlich stellen wir jede Permutation noch in Zyklenschreibweise dar. Das nachfolgende Beispiel soll dies verdeutlichen.

Beispiel 36 Betrachten wir die Permutation $\tau : A \to A$ mit:

$$\begin{aligned} 0 &\mapsto 2 \\ 1 &\mapsto 1 \\ 2 &\mapsto 0. \end{aligned}$$

Dann ist die Zyklenschreibweise von $\tau = (02)(1)$ und der Graph der Permutation ist $\tau^{\bullet} = \{(0,2),(1,1),(2,0)\}$. Schließlich ergibt sich die Inzidenzmatrix dieser Permutation zu:

$$I_{(02)(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5.1 Von einem Element erzeugte Unterhalbgruppen

Um nun die Unterhalbgruppen genau zu charakterisieren, geben wir zunächst die gewählte Permutation g und dann deren Erzeugnis $\langle g \rangle$ an. Beginnen werden wir mit den Unterhalbgruppen, die von einem Element erzeugt werden.
Die folgende Tabelle zeigt, wie die von g erzeugten Unterhalbgruppen aussehen.

Nr.	Permutation g	$\langle g \rangle$	Matrixschreibweise
1	(02)(1)	(02)(1)	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
		(0)(1)(2)	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
2	(012)	(012)	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
		(021)	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
		(0)(1)(2)	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
3	(0)(12)	(0)(12)	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
		(0)(1)(2)	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
4	(01)(2)	(01)(2)	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
		(0)(1)(2)	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
5	(0)(1)(2)	(0)(1)(2)	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Bemerkung: Die von g erzeugte Unterhalbgruppe ist eine von g erzeugte Gruppe.

Dies werden wir anhand eines Beispiels vorrechnen. Dabei wählen wir die Unterhalbgruppe mit der Nummer 1 aus der Tabelle, welche von der Permutation (02)(1) erzeugt wird. Berechnet man jetzt das Produkt $(02)(1) \circ (02)(1)$, so erhält man die Identität, also gerade (0)(1)(2). Damit ist das Inverse der Gruppe mit (02)(1) schon bestimmt. Es wird aber noch ein neutrales Element gefordert. Dazu berechnet man: $(02)(1) \circ (0)(1)(2)$. Es ergibt sich die Permutation (02)(1). Also ist die Identität das neutrale Element. Damit haben wir durch (02)(1) eine Gruppe erzeugt.

Damit haben wir die Unterhalbgruppen von Graphen von Permutationen charakterisiert, die von einem Element erzeugt werden. Das heißt, dass wir nun noch alle Unterhalbgruppen bestimmen müssen, die von mehr als einem Element erzeugt werden.
Wie sich herausstellt, existiert nur eine solche Unterhalbgruppe und diese wird von den folgenden zwei Graphen von Permutationen erzeugt:

$$I_{(02)(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad I_{(012)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die von diesen beiden Elementen erzeugte Unterhalbgruppe ist in S_A die triviale Untergruppe S_A, erzeugt also bereits alle Permutationen:

$$I_{(02)(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_{(0)(12)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_{(021)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$I_{(0)(12)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_{(01)(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad I_{(0)(1)(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Damit haben wir die Unterhalbgruppen von S_A vollständig charakterisiert.

6 Unterhalbgruppen von M_A und der Satz von Cayley

Nach dem Satz von Cayley ist jede Halbgruppe isomorph zu einer Halbgruppe von 1-stelligen Funktionen $f : B \to B$ auf einer geeigneten Menge B. Legen wir uns auf die Menge $B := A$ fest, so gilt dies im Allgemeinen nicht mehr. Daher wollen wir hier ein Gegenbeispiel einer Unterhalbgruppe von M_A zeigen, die sich nicht als Unterhalbgruppe von $\langle A^A, \circ \rangle$ darstellen lässt.
Dies zeigt, dass mit der Darstellung durch binäre Relationen echt mehr repräsentiert werden kann als mit einstelligen Funktionen.
Hierzu betrachten und beweisen wir zunächst den Satz von Cayley.

6.1 Satz von Cayley

Satz 37 *Jede Gruppe ist isomorph zu einer Permutationsgruppe.*

Bemerkung: Genauer gilt: Sei $\langle G, \cdot \rangle$ eine beliebige Gruppe. Ordnet man jedem Element $g \in G$ die Abbildung $g^* : G \to G : x \mapsto x \cdot g$ zu, so gilt:
a) g^* ist eine Permutation,
b) $G^* := \{g^* \mid g \in G\}$ ist eine Permutationsgruppe und
c) G^* und G sind isomorph zueinander, das heißt, es gibt einen Isomorphismus $\psi : g \mapsto g^*$ von G auf G^*.
Beweis: Zunächst wollen wir zeigen, dass g^* eine Permutation ist. Dazu wählen wir uns ein g^* aus S_G. Aus $x^{g^*} = y^{g^*}$ folgt $x \cdot g = y \cdot g \Rightarrow x \cdot g \cdot g^{-1} = y \cdot g \cdot g^{-1} \Rightarrow x = y$. Damit ist g^* injektiv.
Sei z ein Element aus G, dann ist $z = z \cdot g^{-1} \cdot g = (z \cdot g^{-1})^{g^*}$. Damit ist g^* auch surjektiv. Aus dem Teil c) der Bemerkung folgt, dass G^* eine Permutationsgruppe und somit Teilmenge von S_G ist.
Jetzt muss noch gezeigt werden, dass G und G^* isomorph zueinander sind. Die Abbildung ψ muss also eine Bijektion sein. Nach Definition ist sie bereits surjektiv, aber es gilt auch die Injektivität, denn $g_1^* = g_2^* \Rightarrow e^{g_1^*} = e^{g_2^*} \Rightarrow eg_1 = eg_2$. Daraus folgt also $g_1 = g_2$.
Jetzt muß noch gezeigt werden, dass die angegebene Abbildung ψ ein Homomorphismus ist, also insbesondere die Strukturverträglichkeit:
Sei $x \in G$. Dann gilt: $x^{(g_1 g_2)^*} = x(g_1 g_2) = (xg_1)g_2 = (x^{g_1^*})g_2 = (x^{g_1^*})^{g_2^*} = x^{(g_1^* g_2^*)}$. Es gilt demnach $(g_1 g_2)^* = g_1^* g_2^*$. $\square$

Durch den Satz von Cayley wissen wir nun, dass jede Halbgruppe isomorph zu einer Halbgruppe von einstelligen Funktionen $f : A \to A$ ist. Im folgenden geben wir eine Unterhalbgruppe von M_A an, die sich nicht als Unterhalbgruppe von $\langle A^A, \circ \rangle$ darstellen lässt.

Sei U eine Unterhalbgruppe von M_A mit folgenden Eigenschaften: $U = \{\varrho, \varrho^2, \varrho^3\}$ mit $\varrho \in M_A$ und es gilt für alle $k \in \mathbb{N}$: $\varrho^3 = \varrho^{3+k}$. Es handelt sich also um eine Unterhalbgruppe vom Typ $(3, 1)$, siehe Tabelle 3 auf Seite 21. In Abbildung 7 ist die Struktur der Unterhalbgruppe dargestellt.

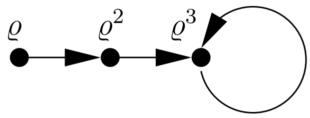


Abbildung 7: Darstellung der Unterhalbgruppe

Nun ist also zu zeigen, dass keine Unterhalbgruppe von $\langle A^A, \circ \rangle$ existiert, die isomorph zu U ist.
Den Beweis führen wir, indem wir zunächst annehmen, dass eine solche Unterhalbgruppe existiert und führen dies zum Widerspruch.
Beweis: Angenommen es gäbe eine Unterhalbgruppe F von $\langle A^A, \circ \rangle$ mit $F = \{f_1, f_2, f_3\}$ und einem Isomorphismus $\varphi : F \to U : f_i \mapsto \varphi(f_i)$.
Dann existiert ein f_i, für das gilt: $\varphi(f_i) = \varrho$. O.B.d.A. sei das nun f_1, also $\varphi(f_1) = \varrho$, dann muss $\varrho^2 = \varrho\,; \varrho = \varphi(f_1)\,; \varphi(f_1) = \varphi(f_1 \circ f_1) = \varphi(f_1^2) = \varrho^2$ gelten, da φ insbesondere

ein Homomorphismus ist.
Weil $\varrho^2 \neq \varrho$ muss also ebenso $f_1 \neq f_1^2$ gelten. O.B.d.A. setzen wir $f_2 = f_1^2$ also $\varphi(f_2) = \varrho^2$. Damit gilt $\varrho^3 = \varrho\,;\varrho\,;\varrho = \varphi(f_1)\,;\varphi(f_1)\,;\varphi(f_1) = \varphi(f_1 \circ f_1 \circ f_1) = \varphi(f_1^3) = \varrho^3$ und analog zum vorangegangenen Fall ist $\varrho^3 \neq \varrho$ und es gilt $f_1 \neq f_1^3$.
O.B.d.A. sei jetzt $f_3 = f_1^3$ also $\varphi(f_3) = \varrho^3$.

Zusammenfassend gilt also mit $f := f_1$: $F = \{f_1, f_2, f_3\} = \{f, f^2, f^3\}$.
Wegen $\varrho^3 = \varrho^4 (= \varrho^5 = \varrho^6 \dots)$ folgt dann

$$\varrho^3 = \varrho^4 = \varrho\,;\varrho^3 = \varphi(f)\,;\varphi(f^3) = \varphi(f \circ f^3) = \varphi(f^4) = \varphi(f^3).$$

Da φ ein Isomorphismus ist, also insbesondere injektiv, folgt daraus: $f^3 = f^4$ usw. für alle $i \in \mathbb{N} : f^3 = f^{3+i}$. Kurz formuliert heißt das, dass F genauso aufgebaut sein muss wie die gewählte Unterhalbgruppe U!

Zunächst fragen wir uns nun, wie eine solche Funktion f aussehen muss. Dabei stellen wir fest, dass f keine Permutation (diese sind immer vom Typ $(1, m)$) sein kann, da wir den Typ $(3, 1)$ gewählt haben. Damit ist die Bildmenge von f eine echte Teilmenge des Definitionsbereiches. Ausserdem kann f auch nicht konstant sein, weil sonst $f^k = f$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gelten würde. Folglich ist die Bildmenge genau zweielementig.
Sei o.B.d.A. $f(A) = \{0, 1\}$. Dann existieren insgesamt sechs mögliche f auf A, die die geforderten Eigenschaften besitzen könnten.

Fall 1a: Es werden 1 und 2 auf das Element 0 abgebildet. Also:

$$\begin{aligned} 0 \mapsto 1 \mapsto 0 \mapsto 1 \\ 1 \mapsto 0 \mapsto 1 \mapsto 0 \\ 2 \mapsto 0 \mapsto 1 \mapsto 0 \end{aligned}$$

In diesem Fall gilt also $f = f^3$.

Fall 1b: Es werden 1 und 2 auf das Element 1 abgebildet. Also:

$$\begin{aligned} 0 \mapsto 0 \mapsto 0 \\ 1 \mapsto 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 1 \mapsto 1 \end{aligned}$$

Somit gilt also $f = f^2$.

Fall 2a: Hier werden die 0 und die 1 auf 0 abgebildet. Dies ergibt:

$$\begin{aligned} 0 \mapsto 0 \mapsto 0 \\ 1 \mapsto 0 \mapsto 0 \\ 2 \mapsto 1 \mapsto 0 \end{aligned}$$

Es gilt also f^2 ist konstant und damit $f^2 = f^3 = f^4 = \dots$.

Fall 2b: Hier werden die 0 und die 1 auf 1 abgebildet. Dies ergibt:

$$
\begin{aligned}
0 \mapsto 1 \mapsto 1 \\
1 \mapsto 1 \mapsto 1 \\
2 \mapsto 0 \mapsto 1
\end{aligned}
$$

Es gilt wie in Fall 2a, dass f^2 konstant ist und damit $f^2 = f^3 = f^4 = \dots$.

Fall 3a: Jetzt werden die 0 und die 2 auf das Element 0 abgebildet:

$$
\begin{aligned}
0 \mapsto 0 \mapsto 0 \\
1 \mapsto 1 \mapsto 1 \\
2 \mapsto 0 \mapsto 0
\end{aligned}
$$

Damit ergibt sich analog zu Fall 1b, dass $f^2 = f^3 = \dots$ gilt.

Fall 3b: Abschließend werden die 0 und die 2 auf das Element 1 abgebildet:

$$
\begin{aligned}
0 \mapsto 1 \mapsto 0 \mapsto 1 \\
1 \mapsto 0 \mapsto 1 \mapsto 0 \\
2 \mapsto 1 \mapsto 0 \mapsto 1
\end{aligned}
$$

Damit erhalten wir analog zu Fall 1a, dass $f = f^3$ gilt.

Alle sechs möglichen Fälle erfüllen also nicht die Voraussetzungen, um eine Unterhalbgruppe vom Typ $(3, 1)$ zu bilden. Damit kann aber F nicht isomorph zu U sein. Wir haben also eine falsche Annahme gewählt, d.h. es gibt keine Unterhalbgruppe von $\langle A^A, \circ \rangle$, die isomorph zu U ist. $\square$

Somit ist $U = \{\varrho, \varrho^2, \varrho^3\}$ ein Beispiel für eine Unterhalbgruppe von M_A, die sich nicht als Unterhalbgruppe von $\langle A, \circ \rangle$ darstellen lässt.

Literatur

[1] Stojan Bogdanovic. *Semigroups with a system of subsemigroups.* University of Novi Sad, 1985.

[2] I.N. Bronstein, K.A. Semendjajew, G. Musiol, et al. *Taschenbuch der Mathematik.* Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt am Main, 2001.

[3] A.G. Kuros. *Vorlesungen über allgemeine Algebra.* B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1964.